XVIII MIĘDZYNARODOWA OLIMPIADA MATEMATYCZNA ODBYŁA SIĘ W AUSTRII (7-21 LIPCA 1976 R.)

Dwudniowe zawody odbyły się w Lienzu (Wschodni Tyrol) w dniach 12 i 13 lipca. W zawodach uczestniczyli uczniowie z 18 państw: Austrii, Bułgarii, Czechosłowacji, Finlandii, Francji, Grecji, Holandii, Jugosławii, Kuby, NRD, Polski, Rumunii, Stanów Zjednoczonych AP, Szwecji, Węgier, Wielkiej Brytanii, Wietnamu i ZSRR (z Kuby przyjechało trzech uczniów, z pozostałych państw po ośmiu). Ponadto na prawach obserwatorów uczestniczyło dwóch uczniów z RFN. Międzynarodowe jury przyznało 9 nagród I stopnia, 28 nagród II stopnia i 45 nagród III stopnia. Polacy zdobyli 6 nagród III stopnia. Otrzymali je: Jerzy Grzybowski (V LO w Krakowie), Andrzej Huczyński (III LO we Wrocławiu), Adam Parusiński (I LO w Gdańsku), Janusz Pawlikowski (I LO w Bydgoszczy), Jan Wehr (XIV LO w Warszawie).

W nieoficjalnej punktacji zespołowej Polacy zajęli IX miejsce za ZSRR, Wielką Brytanią, Stanami Zjednoczonymi, Bułgarią, Austrią, Węgrami i NRD. Oto zadania:

1. Pole powierzchni płaskiego czworokąta wypukłego równe jest 32 cm² a suma długości dwóch przeciwległych jego boków i jednej przekątnej równa jest 16 cm. Wyznaczyć wszystkie wartości, które może przyjmować długość drugiej przekątnej.

2. Niech $P_1(x) = x^2-2$ i $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ dla $j = 2, 3, \ldots$ Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wszystkie pierwiastki równania $P_n(x) = x$ są rzeczywiste i parami różne.

3. Prostopadłościenne pudełko można całkowicie wypełnić sześcianami jednostkowymi. Jeżeli będziemy umieszczać w nim sześciany o objętości 2 i krawędziach równoległych do krawędzi pudełka, to maksymalna liczba takich sześcianów wypełni tylko 40% objętości pudełka. Wyznaczyć wewnętrzne wymiary wszystkich pudełek o tych własnościach. ($\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$).

4. Znaleźć największą wartość iloczynu liczb naturalnych, których suma równa jest 1976.
(Odpowiedź uzasadnić.)

5. Dany jest układ p równań z $q = 2p$ niewiadomymi

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1q}x_q = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\ldots+a_{pq}x_q = 0$$

gdzie $a_{ij} \in \{0, -1, +1\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$; $j = 1, 2, \ldots, q$. Udowodnić, że istnieje rozwiązanie $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ tego układu spełniające następujące warunki:
— wszystkie x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ są liczbami całkowitymi,
— co najmniej jedna z liczb x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ jest różna od zera,
— dla każdego j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ jest $|x_j| \leqslant q$.

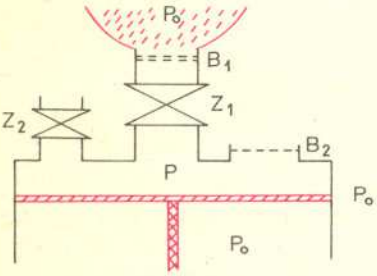
6. Ciąg liczbowy $u_0, u_1, u_2, \ldots$ jest określony następująco: $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$,

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Udowodnić, że zachodzi równość

$$[u_n] = 2\,\frac{2^n-(-1)^n}{3} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x).



Rozwiązanie zadania F 38

Schematyczny wygląd silnika może być np. taki jak na rysunku obok.

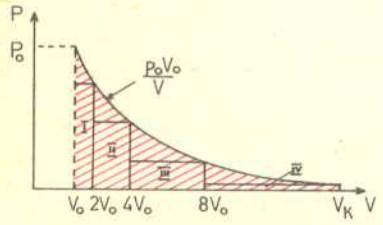
Pierwsza faza cyklu: zawór Z_1 otwarty, Z_2 zamknięty. Ciśnienie pod tłokiem na mocy prawa Daltona wynosi p_0+p_0. Odsuwając tłok od dna cylindra uzyskujemy pracę wykonywaną przez nadwyżkę ciśnienia pod tłokiem nad ciśnieniem atmosferycznym. W fazie tej pobieramy ilość gazu jaka wydziela się z groty w czasie przewidzianym na pełny cykl. Jeśli jest to objętość V_0, to praca tłoka w tej fazie wyniesie p_0V_0. Ponieważ wyczerpaliśmy już ilość gazu przypadającą na cały cykl, więc musimy zamknąć zawór Z_1 i dalsze rozprężanie prowadzić przy zamkniętym zaworze Z_1. Wskutek tego ciśnienie cząstkowe gazu z groty będzie pod tłokiem spadało zgodnie z wzorem $p_0 \cdot V_0/V$. Dzięki błonie B_2 ciśnienie cząstkowe powietrza pod tłokiem jest w każdej chwili równe p_0 i równoważy ciśnienie nad tłokiem. Efektywną pracę wykonuje więc ciśnienie cząstkowe gazu z groty. Pytanie postawione w zadaniu równoważne jest zapytaniu, czy istnieje ograniczenie na pracę jaką możemy uzyskać rozprężając izotermicznie określoną porcję gazu. Żeby to zbadać, sporządźmy wykres funkcji $p_0 \cdot V_0/V$ w zależności od V.

Jasne jest, że jeśli w tej drugiej fazie rozprężymy gaz do objętości V_k, to wykonana w drugiej fazie praca równa jest polu powierzchni zakreskowanej na rysunku. Musimy dowieść, że przy dostatecznie dużym V_k (na co nie ma teoretycznych ograniczeń) otrzymana praca może być dowolnie duża.

Rozpatrzmy w tym celu zaznaczone na rysunku prostokąty odpowiadające odciętym $2V_0, 4V_0, 8V_0, \ldots, 2^nV_0$. Jest oczywiste, że pola tych prostokątów są równe i że pod krzywą można „zmieścić" dowolnie dużo takich prostokątów. Jeżeli $V_k = 2^nV_0$, to jest jasne, że praca L może być ograniczona przez następujące dwie liczby

$$\frac{p_0V_0}{2}n < L_{V_0V_k} < p_0V_0n$$

lub w dość grubym przybliżeniu $L_{V_0V_k} \approx p_0V_0 \log_2 \frac{V_k}{V}$. W praktyce $\log_2 \frac{V_k}{V_0}$ nie może być liczbą zbyt dużą, gdyż logarytm rośnie niezwykle wolno ze wzrostem V_k, teoretycznie jednak liczba ta nie jest ograniczona. Oczywiście po osiągnięciu żądanej objętości V_k otwieramy zawór Z_2 i sprowadzamy tłok do położenia początkowego bez wykonywania żadnej pracy.



Dowiedliśmy więc, że w określonym czasie trwania cyklu możemy uzyskać teoretycznie dowolnie wielką pracę. Moc silnika (idealnego) może być dowolnie duża mimo ograniczonej liczby gazu roboczego wydobywającego się z groty w jednostce czasu.

Praca ta wykonywana jest oczywiście kosztem ciepła otoczenia jakie jest pobierane przy izotermicznym rozprężaniu gazu. Wynik ten nie jest sprzeczny z II zasadą termodynamiki, gdyż pobieranie ciepła z otoczenia nie jest jedynym efektem pracy silnika. Odbywa się nieustanne mieszanie gazu wydobywającego się z groty z powietrzem atmosferycznym.

Uwaga! W zadaniu rozważaliśmy silnik idealny. W praktyce moc silnika będzie ograniczona. Zastanówcie się, jakie mogą być tego powody (nie termodynamiczne) i jak duży jest ich wpływ.