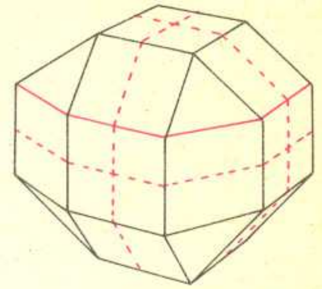
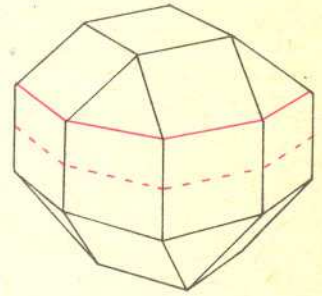
Ile jest wielościanów półregularnych, czyli czy Archimedes miał rację?

Wielościany półregularne znane są od ponad 2000 lat. Już Archimedes stwierdził, że oprócz dwóch serii (graniastosłupy i antygraniastosłupy) istnieje 13 takich wielościanów (patrz Delta 12/1975). Przez 2000 lat, a szczególnie po systematycznym zbadaniu tego zagadnienia przez Keplera, wierzono, że innych wielościanów półregularnych niż wymienione przez Archimedesa być nie może. Okazało się jednak, że w teorii wielościanów półregularnych był pewien defekt. Na początku lat pięćdziesiątych naszego stulecia radziecki matematyk Aszkinuze zauważył, że istnieje jeszcze jeden, czternasty wielościan półregularny. „Portret" tego wielościanu widzimy na rys. 2. Wielościan ten to chytrusek nie lada, bowiem liczby ścian poszczególnych rodzajów, krawędzi i wierzchołków ma dokładnie takie same jak wielościan półregularny pokazany na rys. 1 (wymieniony przez Archimedesa). A mimo to jest on inny!



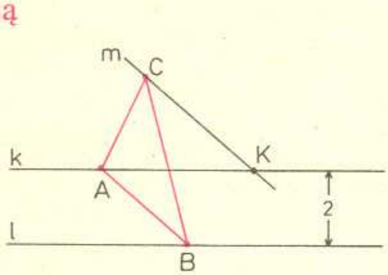
Rys. 1

Czytelnik zechce zwrócić uwagę, że na wielościanie z rys. 1 istnieją trzy „łańcuchy" kwadratów spojonych przeciwległymi bokami. Łańcuchy te zaznaczono liniami przerywanymi. Natomiast na wielościanie z rys. 2 istnieje tylko jeden taki „łańcuch". Przy obracaniu wielościanu, jego przesuwaniu, a także przy odbijaniu w lustrze, liczba „łańcuchów" nie może ulec zmianie. Wynika stąd, że pokazane wielościany są różne w tym znaczeniu, że żaden z nich nie daje się dokładnie pokryć z drugim za pomocą przekształcenia izometrycznego.
Tak więc liczba ścian poszczególnych rodzajów, liczba krawędzi a także liczba i rodzaj wierzchołków nie charakteryzują jeszcze wielościanu w pełni.
Wspomniany defekt teorii wielościanów półregularnych polegał właśnie na niedostrzeżeniu tego faktu.
Zauważmy, że wielościan z rys. 2 można otrzymać przez odcięcie górnej części wielościanu z rys. 1 (wzdłuż czerwonej linii ciągłej), obrócenie jej o 45° i ponowne połączenie z resztą. I jak tu po tym wszystkim nie wierzyć w feralność trzynastki?
Ponieważ nasz chytrusek ukrywał się przez ponad 2000 lat, trudno się dziwić, że został opuszczony w spisie wielościanów zamieszczonym w Delcie. (*W. G.*)



Rys. 2

Czytelnicy proponują



Kolega *Jan ANTONIK* z Grzebieni, uczeń II klasy LO w Dąbrowie Białostockiej, podał twierdzenie:

Niech punkt A leży na prostej k, punkt B na prostej l równoległej do k, punkt C na prostej m równoległej do $\overline{AB}$. Oznaczmy przez K punkt przecięcia prostych k i m. Jeśli odległość k i l wynosi 2 [cm], to pole ΔABC jest równe AK [cm^2].

Polecamy sprawdzenie. Autor proponuje zastosować to twierdzenie do mierzenia pola trójkąta.

Dlaczego tak jest? — rozwiązanie

Mamy wykazać, że opisany w poprzednim numerze przyrząd kreśli prostą.
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i na pewien czas pomińmy listewkę QT.
Zauważmy, że $ORPR'$ jest deltoidem, a $QRPR'$ rombem, co pozwala na stwierdzenie, że punkty O, P, Q leżą na jednej prostej prostopadłej do prostej RR', punkt S zaś jest środkiem odcinka $\overline{PQ}$.
Z uogólnionego twierdzenia Pitagorasa (w $\Delta\ OPR$) mamy

$$c^2 = a^2+OP^2-2\cdot OP\cdot PS =$$

$$= a^2+OP^2-2\cdot OP\cdot\frac{1}{2}(OP-OQ) = a^2+OP\cdot OQ$$

Widać więc, że iloczyn $OP\cdot OQ$ jest stały: niezależnie od położenia przyrządu wynosi c^2-a^2. Stąd wynika, że taki „zubożony" przyrząd pokazuje nam wzajemne położenie punktów inwersyjnych względem okręgu o środku O i promieniu $\sqrt{c^2-a^2}$: mianowicie Q i P są wzajemnie inwersyjne.
Powróćmy do całego przyrządu. Listewka QT gwarantuje nam, że punkt Q leży na okręgu (o środku T), który (wobec $TO = b = TQ$) przechodzi przez punkt O. Obrazem inwersyjnym takiego okręgu jest prosta (patrz „Tylko cyrklem", Delta 7/76) i po niej właśnie musi się poruszać przegub P.