Żadne z pozostałych równań — (18), (19), (20) nie ma tej własności. Np. rozwiązaniem równania (20) jest też para funkcji

$$S(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}], \qquad C(x) = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}],$$

(tzw. *sinus hiperboliczny* i *cosinus hiperboliczny*), jak również para funkcji liniowych

$$S(x) = qx, \qquad C(x) = 1 + px,$$

gdzie p i q są zupełnie dowolnymi stałymi.
Nawet dwa równania (18) i (19) razem nie charakteryzują funkcji trygonometrycznych. Ich rozwiązanie w klasie funkcji ciągłych ma postać

$$S(x) = e^{ax}\sin cx, \qquad C(x) = e^{ax}\cos cx,$$

gdzie stałe a i c mogą być dowolne. Funkcje trygonometryczne otrzymamy, przyjmując wartość parametru a jako zero.

Oczywiście istnieje dużo innych równań funkcyjnych, postacią i własnościami nieraz bardzo różniących się od podanych tutaj przykładów. Niektóre typy równań funkcyjnych, jak np. równania różniczkowe czy całkowe, wyodrębniły się dziś w osobne dyscypliny matematyczne. Obecnie pod nazwą „*równania funkcyjne*" rozumie się takie równania funkcyjne, w których nie występują pochodne ani całki. Nawet po tym ograniczeniu, bogactwo i rozmaitość różnych rodzajów i typów równań funkcyjnych są ogromne. Jeśli dodamy ponadto, że równania funkcyjne pojawiają się w niemal wszystkich dziedzinach matematyki, stanie się jasne, że stanowią one fascynujący przedmiot badań naukowych. Wśród pionierów tych badań znajdują się również najwybitniejsi matematycy polscy, jak Wacław Sierpiński czy Stefan Banach. A dzisiaj w badaniach nad równaniami funkcyjnymi matematycy polscy odgrywają czołową rolę na świecie.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 109. Na płaszczyźnie dany jest zbiór n punktów ($n \geqslant 2$), przy czym odległość dowolnych dwóch punktów tego zbioru jest nie większa od 1. Udowodnić, że zbiór ten jest zawarty w pewnym kwadracie o boku długości 1.
Rozwiązanie na str. 10

M 110. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

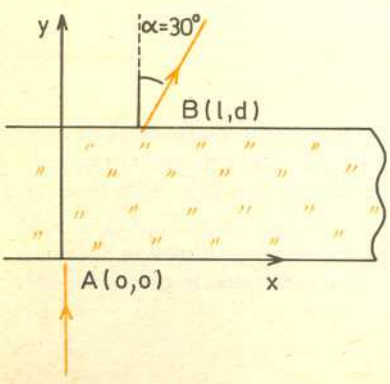
Rozwiązanie na str. 5

M 111. Udowodnić, że jeżeli M jest punktem wewnętrznym przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC, to

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = CM^2 \cdot AB^2.$$

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr hab. Andrzej SZYMACHA



F37. Na płytkę płaskorównoległą, której współczynnik załamania n zmienia się według wzoru

$$n(x) = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}} = \frac{1{,}2}{1 - \frac{x}{13\ [\mathrm{cm}]}}$$

pada w punkcie A(0, 0), prostopadle do płytki, promień światła. Promień opuszcza płytkę w punkcie B(l, d) pod kątem $\alpha = 30°$ (patrz rysunek). Wyznaczyć grubość płytki d oraz odległość l punktu B od osi y. Po jakim torze porusza się promień wewnątrz płytki?
Rozwiązanie na str. 11
(zadanie z VII Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej, autor dr hab. A. Szymacha)