Ta trzecia

Dr Marek KORDOS

„Samolot wystartował z Warszawy i poleciał prosto przed siebie, by potem skręcić pod kątem prostym, znów lecieć i znów skręcić pod kątem prostym i po pewnym czasie wrócić do Warszawy z kierunku prostopadłego do tego, w którym odleciał. Ile przeleciał kilometrów?"
Głupie zadanie, prawda? Niewątpliwie widać na siłę dorobioną fabułę, która wyda się jeszcze głupsza po rozwiązaniu zadania. Mało jest (o ile się w ogóle trafiają) samolotów mogących przelecieć bez lądowania 30 tys. kilometrów, a taka właśnie jest odpowiedź.
Żeby to ustalić, trzeba tylko uświadomić sobie, że zwrot „prosto" ma dla nas kilka znaczeń. W przypadku zaś poruszania się po sferze (powierzchni kuli) oznacza „wzdłuż okręgu wielkiego" (tj. leżącego w płaszczyźnie przechodzącej przez środek kuli). Jest to rozsądny pogląd, albowiem łuk okręgu wielkiego przechodzącego przez punkty A i B sfery jest najkrótszą linią leżącą na sferze i łączącą te dwa punkty: a więc — prosto, czyli najkrótszą drogą.

W tym miejscu można wpaść w zdziwienie przypomniawszy sobie, jak wielki szum towarzyszył odkryciu geometrii Bolyai-Łobaczewskiego. Przecież zdumieni odkryciem jakiejś nieeuklidesowej geometrii byli ludzie od dłuższego czasu przyzwyczajeni do poruszania się po sferze i używania pojęcia „prostej" w dwu znaczeniach. Mieli nawet na sferze trójkąty z trzema kątami prostymi, jak ten, który przeleciał nasz kompromitujący samolot. Istotnie, jeśli z bieguna północnego udamy się południkiem Greenwich na równik, równikiem do jednego z dziewięćdziesiątych południków, i z powrotem na biegun, to przemierzymy właśnie taki trójkąt.
No dobrze, ale z Warszawy? Z Warszawy też można, bo przecież sfera jest wszędzie taka sama (choćby na to nie wyglądała).

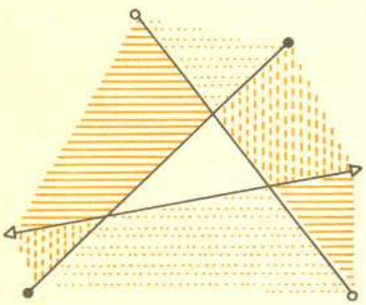
Nie należy jednak sądzić pochopnie, a już w szczególności naszych poprzedników, od których przecież sami wszystkiego się nauczyliśmy. Mieli oni istotne powody, aby geometrii sferycznej (tak się nazywa geometria powierzchni kuli) nie traktować równorzędnie z euklidesową. I to nie tylko dlatego, że mieli kłopoty z wyobrażeniem jej sobie w trójwymiarowej postaci. Bardzo wyraźne opory budziły proste przecinające się w dwóch punktach; punktach, między którymi jest nieskończenie wiele najkrótszych dróg. A przecież na sferze tak jest. Dlatego też geometria sferyczna zawsze była dyskryminowana.
Sprawę można jednak uratować zauważając, że wszystko psują antypody. To właśnie na antypodach przecinają się dwukrotnie proste; przez antypody przechodzi nieskończenie wiele prostych. Można by więc sprawę ratować pozbawiając sferę antypodów. Np. sklejając je ze sobą. Ten genialny w swej prostocie pomysł istotnie, jak się okazuje, poprawia sytuację; ma tylko jedną wadę, o której może się przekonać każdy, kto spróbuje połączyć równocześnie wszystkie antypody jakiegokolwiek modelu sfery (np. worka, lepiej — zawiązanego). Tego nie da się zrobić!
W każdym jednak razie możemy sobie wyobrazić, co to będzie. Bo, na przykład, na półsferze są reprezentowane wszystkie pary antypodów sfery, a tylko te na brzegu są oba obecne. Można więc sklejać antypody na brzegu półsfery (np. zawiązać tak worek). Też się nie da!
Ale wyobrażenie mamy: jakby się dało, to byłoby to. To ogromnie głęboka informacja — wobec tego wszelkie lokalne sprawy w tak powstałej płaszczyźnie (jej geometria nazywa się *eliptyczna*) przedstawiają się tak samo jak na sferze — wygoda niesłychana. A musi tak być, jeśli problem „zmieści się" na półsferze nie dotykając jej brzegu — tu przecież nic nie zmienialiśmy.
Chciałoby się jednak mieć jakieś wyobrażenie, jak to wygląda „w całości", a nie tylko lokalnie, choć po prawdzie nie znam osobiście nikogo, kto obejrzałby płaszczyznę euklidesową inaczej niż lokalnie. Płaszczyzna, o której mówimy, bywa nazywana eliptyczną lub rzutową (tak ją nazywamy, kiedy nie interesują nas odległości na niej). Pod tą ostatnią nazwą figurowała jej podobizna np. w „Delcie" 10/1976, gdzie napisano o niej też, że jest zaklejeniem sfery z otworem wstęgą Möbiusa. Proste, nie?

Może więc nie przyglądać się, tylko zbierać jej ciekawsze własności. Płaszczyzna taka ma np. własność *dualności*, co oznacza, że jeśli w jakimś twierdzeniu o punktach, prostych i ich wzajemnym położeniu zamienimy miejscami nazwy punktów i prostych, to otrzymane zdanie też będzie twierdzeniem. Przykład: „Przez dowolne dwa punkty przechodzi prosta"; dualnie (z modyfikacjami, jakich wymaga język potoczny, a nie matematyka) będzie to brzmiało: „Dowolne dwie proste mają punkt wspólny".

No i w tym miejscu, istotnie, stwierdzamy, że nie jest to ani geometria Euklidesa, ani Bolyai-Łobaczewskiego, to jest właśnie ta trzecia (patrz: „Delta" 7/1975).
Z rozważań o półsferze mamy natomiast wniosek, że prosta jest krzywą zamkniętą. Istotnie! Okręgi wielkie opuszczały półsferę w antypodach, a te właśnie mają być sklejone. Prosta zatem ma skończoną długość! Istnieją najbardziej od siebie oddalone punkty na płaszczyźnie!
Nadzwyczajność tego ostatniego stwierdzenia można jednak wydatnie zmniejszyć, kojarząc ją z dualnością. Maksymalne oddalenie punktów jest po prostu obrazem dualnym prostopadłości prostych. Istotnie, przecinające się proste (a tu mamy tylko takie) „dalej" od siebie być nie mogą.
Czytając raz jeszcze „Klasyfikację powierzchni" z „Delty" 10/1976 stwierdzamy, że nasza płaszczyzna jest jednostronna i że prosta (mimo, iż jest krzywą zamkniętą) płaszczyzny nie rozcina. Nie ma więc tam półpłaszczyzn — płaszczyzna z wyciętą prostą jest dalej „w jednym kawałku"!

Istnienie maksymalnie oddalonych punktów może nasunąć skojarzenia z geometrią Bolyai — Łobaczewskiego, gdzie można było geometrycznie obrać jednostkę długości. I jest to dobre skojarzenie. Ustalając, że maksymalnie oddalone punkty są w odległości $\pi/2$, otrzymujemy związek podobny do znanego np. z „Delty" 10/1975: pole trójkąta jest równe *minus* defektowi tego trójkąta. Dlaczego minus? Dlatego, że tu trójkąty mają sumę kątów większą niż π. Pełnej analogii oczywiście nie ma: tak jak prosta ma tu skończoną długość π, tak i pole całej płaszczyzny jest skończone i wynosi 2π. Spróbujcie uzasadnić — czemu (może o czymś świadczy model na półsferze?)
Analogicznie natomiast do geometrii Bolyai-Łobaczewskiego i tu jest prawdziwa IV cecha przystawania trójkątów: jeśli odpowiednie kąty są równe, to trójkąty są przystające. I tu od razu wątpliwość: trójkąt? A co to takiego? Przecież prosta nie rozcina płaszczyzny. No tak, ale trzy proste nie przechodzące przez jeden punkt rozcinają naszą płaszczyznę. Tyle, że nie na siedem części, jak to było u Euklidesa i Bolyai-Łobaczewskiego, a zaledwie na cztery. Wyznaczają więc cztery trójkąty na ogół o różnych kątach (pytanie: kiedy wszystkie cztery trójkąty są przystające?)

Defekt trójkąta *ABC* to liczba:
$\pi - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BCA - \sphericalangle CAB$



A teraz problem do samodzielnego rozwiązania:

Czemu geodeci triangulując powierzchnię Ziemi startują zawsze z odmierzonej bazy? Przecież lokalnie obowiązują na sferze te same zależności, co w geometrii eliptycznej. Czy, wobec tego, nie można by obejść się bez bazy?

I na zakończenie o poważniejszych problemach do samodzielnego rozwiązania.
Za początek istnienia geometrii eliptycznej uważa się rok 1854 (praca Riemanna — patrz „Delta" 7/1975).
Mimo jednak 120-letniej historii jest to bardzo słabo rozwinięta geometria. Dopiero np. w ostatnich latach została zaksjomatyzowana w zadawalający sposób. Jest w niej jeszcze bardzo wiele do zrobienia i można w niej znaleźć więcej białych plam niż w geometrii Euklidesa i Bolyai-Łobaczewskiego razem wziętych. Jeśli tylko będzie się ją badać.

Odpowiedź

Zadanie: „Wiatraczkowe" ramiona muszą przechodzić przez środki boków większego kwadratu.

Problem: Mniejszy kwadrat musi mieć pole co najmniej dwukrotnie mniejsze.