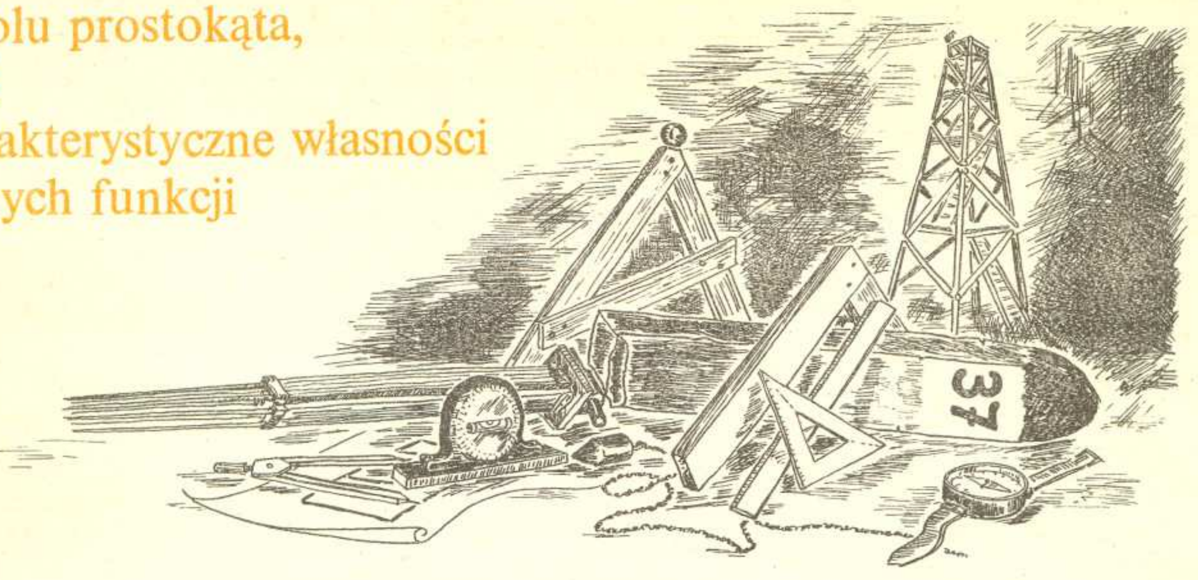
O polu prostokąta, czyli charakterystyczne własności różnych funkcji



Prof. dr Marek KUCZMA

Pole prostokąta o bokach a i b wyraża się wzorem: $P = a \cdot b$. Dlaczego? Czy wzór ten został nam narzucony przez autorów podręczników i zależy wyłącznie od ich wyboru? Czy też może jest on koniecznością i nie ma innej możliwości; innymi słowy, może można go udowodnić?

Aby móc na te pytania odpowiedzieć, musimy wpierw dobrze zdać sobie sprawę z tego, czym właściwie jest pole prostokąta. Możemy powiedzieć, że jest to miara wielkości prostokąta. Zauważmy jednak, że zdanie to nie jest bynajmniej definicją, gdyż zastępuje tylko jedno niesprecyzowane pojęcie (pole) przez inne (miara wielkości). Niemniej pozwala ono odwołać się do intuicji geometrycznej. Jakież zatem własności powinna mieć taka miara wielkości prostokąta? Intuicja geometryczna sugeruje nam, że powinna ona spełniać następujące trzy warunki:

A. Każdy prostokąt ma jednoznacznie określone pole, które wyraża się liczbą rzeczywistą nieujemną.

B. Przystające prostokąty mają równe pola.

C. Jeżeli prostokąt podzielimy na dwie części odcinkiem równoległym do któregokolwiek z boków, to suma pól powstałych w ten sposób dwóch prostokątów jest równa polu wyjściowego prostokąta.

Zanim posuniemy się dalej w naszych rozważaniach, trzeba jasno stwierdzić, że powyższe postulaty, aczkolwiek dyktowane intuicją geometryczną, nie są bynajmniej konieczne i w znacznym stopniu przyjęcie ich zależy od naszej woli.

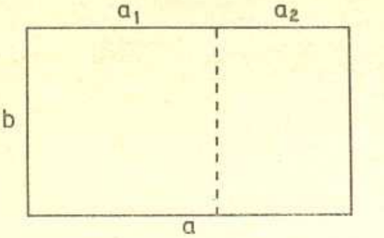
Zgadzamy się, że miara powinna być liczbą nieujemną, ale są przecież wielkości (np. temperatura, czas), których miarę wyrażamy w liczbach względnych.

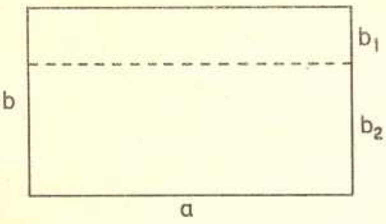
Dwa przystające prostokątne poletka gruntu mogą mieć różną cenę (a cenę wszak też możemy uważać za pewną miarę) w zależności od położenia, gleby itp.

Wreszcie np. dwie pięciodekowe paczki kawy kosztują więcej niż jedna paczka dziesięciodekowa. Tak więc w pewnych okolicznościach miara nie musi spełniać żadnego ze sformułowanych powyżej postulatów **A, B, C**. W przypadku pola prostokąta wydają się nam one rozsądne i zgodne z naszą intuicją, zatem jesteśmy gotowi przyjąć je bez zastrzeżeń. Zależy to jednakże od naszej woli, od naszego wyboru.

Zgódźmy się zatem, że przyjmujemy postulaty **A, B, C** i postarajmy się teraz przetłumaczyć je na język matematyczny. Ponieważ prostokąty o bokach odpowiednio równych są przystające, więc z postulatów **A** i **B** wynika, że pole prostokąta zależy wyłącznie od jego boków (czy też, dokładniej, od długości jego boków). Ściślej mówiąc, pole to jest funkcją: $P = P(a, b)$, określoną w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i przyjmującą wartości w zbiorze $\langle 0, +\infty)$:

(1) $$P: \langle 0, +\infty) \times \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty).$$





August Louis Cauchy (1789—1857), matematyk francuski. Twórca współczesnego, ścisłego wykładu analizy matematycznej. Zajmował się wszystkimi niemal ówcześnie rozwijanymi działami matematyki, szczególnie zaś analizą matematyczną, teorią funkcji zespolonych i równaniami różniczkowymi, gdzie uzyskał szereg bardzo ważnych rezultatów. (Ciekawostka: pierwszy podał poprawny dowód wzoru Taylora). Zajmował się również mechaniką, astronomią i optyką.

Najistotniejsze informacje zawiera jednak postulat C. Dokonując opisanych podziałów (patrz rysunek) widzimy, że funkcja P musi spełniać następujące dwa związki:

(2) $$P(a_1+a_2, b) = P(a_1, b)+P(a_2, b),$$

(3) $$P(a, b_1+b_2) = P(a, b_1)+P(a, b_2).$$

Związki (2) i (3) muszą być prawdziwe dla wszelkich nieujemnych a, b, a_1, a_2, b_1, b_2; są zatem tożsamościami. Nasze zadanie można więc sformułować następująco: znaleźć funkcję (1), dla której związki (2) i (3) są spełnione tożsamościowo względem wszystkich występujących tam zmiennych.

Tego typu zadania, w których problem polega na wyznaczeniu niewiadomej funkcji na podstawie zadanej tożsamości, którą funkcja ta ma spełniać, noszą nazwę *równań funkcyjnych.*

Związki (2) i (3) są właśnie przykładami równań funkcyjnych. Zostawmy na chwilę problem wzoru na pole prostokąta i zajmijmy się równaniami funkcyjnymi. Jednym z najważniejszych równań funkcyjnych jest *równanie Cauchy'ego*

(4) $$f(x+y) = f(x)+f(y).$$

Postarajmy się wyznaczyć funkcję $f\colon \langle 0, +\infty) \to \langle 0, +\infty)$ (tj. funkcję o wartościach nieujemnych, określoną dla nieujemnych wartości zmiennej niezależnej) spełniającą związek (4) dla wszystkich nieujemnych x, y. W szczególności (4) ma zachodzić dla $x = y = 0$.

Zastępując w (4) x i y przez zero otrzymamy $f(0) = 2f(0)$, skąd wynika, że

(5) $$f(0) = 0.$$

Przez indukcję łatwo udowodnić, że

(6) $$f(nx) = nf(x)$$

dla wszelkich x nieujemnych i wszelkich n całkowitych nieujemnych. Istotnie, dla $n = 0$ prawdziwość związku (6) wynika z (5). Zakładając, że zachodzi dla pewnego całkowitego $n = k \geqslant 0$ i dla wszelkich $x \geqslant 0$, mamy dla $n = k+1$ i dowolnego $x \geqslant 0$:

$$f((k+1)x) = f(x+kx) = f(x)+f(kx) = f(x)+kf(x) = (k+1)f(x),$$

gdzie po drodze wykorzystaliśmy własność (4) dla $y = kx$. Tak więc związek (6) został udowodniony.

Pokażemy z kolei, że związek (6) pozostaje również słuszny dla n wymiernych nieujemnych. Weźmy dowolne liczby całkowite $p \geqslant 0$, $q > 0$ oraz dowolną liczbę rzeczywistą $x \geqslant 0$. Mamy na podstawie (6):

$$pf(x) = f(px) = f\left(q\frac{p}{q}x\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right), \quad \text{skąd} \quad f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x).$$

Innymi słowy, funkcja f spełnia związek

(7) $$f(rx) = rf(x)$$

dla wszelkich nieujemnych x rzeczywistych i r wymiernych.

Kładąc w (7) w szczególności $x = 1$ i oznaczając $f(1) = c$, otrzymujemy

(8) $$f(r) = cr$$

dla wszelkich nieujemnych r wymiernych.

Udowodnimy teraz, że związek (8) zachodzi nie tylko dla r wymiernych, ale dla dowolnych r rzeczywistych nieujemnych. W tym celu utwórzmy nową funkcję

(9) $$g(x) = f(x)-cx,$$

gdzie, jak wyżej, $c = f(1)$.
Uwzględniając fakt, że funkcja f spełnia równanie (4) w szczególności dla $y = 1$, otrzymamy

$$g(x+1) = f(x+1)-c(x+1) = f(x)+f(1)-cx-c = f(x)-cx = g(x) \text{ gdyż } f(1) = c.$$

Oznacza to, że funkcja g jest okresowa, o okresie 1: $g(x+1) = g(x)$.

Ponieważ wartości funkcji f są nieujemne, a wartość wyrażenia cx dla $x \in \langle 0, 1\rangle$ nie przekracza c, więc z (9) widzimy, że funkcja g spełnia warunek

(10) $$g(x) \geqslant -c \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, 1\rangle.$$

Z okresowości zaś wynika, że nierówność (10) jest słuszna dla wszystkich $x \geqslant 0$. Weźmy teraz dowolne $x \in \langle 0, 1\rangle$. Na podstawie wzoru (9) oraz równania (4), gdzie przyjmiemy $y = 1-x$, mamy

$$g(x)+g(1-x) = f(x)-cx+f(1-x)-c(1-x) = f(1)-c = 0, \text{ tj.}$$

(11) $$g(x)+g(1-x) = 0.$$

Chcemy pokazać, że funkcja g jest identycznie równa zeru. Gdyby w jakimś punkcie $x \in \langle 0, 1\rangle$ wartość funkcji g była różna od zera, to jak wynika ze związku (11) dokładnie jedna z wartości $g(x)$ i $g(1-x)$ byłaby ujemna. Niech x_0 będzie takim punktem przedziału $\langle 0, 1\rangle$, że $g(x_0) < 0$. Na podstawie (6) mamy dla dowolnych n naturalnych

$$g(nx_0) = f(nx_0)-cnx_0 = nf(x_0)-ncx_0 = n[f(x_0)-cx_0] = ng(x_0).$$

Zatem dla dostatecznie dużego n naturalnego będziemy mieli $g(nx_0) < -c$, co jest sprzeczne z (10). Funkcja g musi więc być tożsamościowo równa zeru, w przedziale $\langle 0, 1\rangle$, a wobec okresowości musi być ona tożsamościowo równa zeru w całym przedziale $\langle 0, +\infty\rangle$. Oznacza to (por. (9)), że

(12) $$f(x) = cx \text{ dla wszystkich } x \in \langle 0, \infty).$$

Tym samym wyznaczyliśmy funkcję f, a więc rozwiązaliśmy równanie (4).

Możemy obecnie rozwiązać równania (2) i (3). Ustalając na chwilę w (2) zmienną b i pisząc $f(x) = P(x, b)$ widzimy, że funkcja f spełnia równanie (4). Musi być zatem postaci (12), gdzie współczynnik c może jednak zależeć od ustalonej chwilowo wartości zmiennej b:

(13) $$P(a, b) = c(b)a.$$

Jeżeli teraz podstawimy wzór (13) do równania (3) i przyjmiemy, że $a = 1$, to otrzymamy $c(b_1+b_2) = c(b_1)+c(b_2)$, co oznacza, że funkcja c również spełnia równanie (4). (Nie jest istotne czy zmienne niezależne oznaczymy przez x, y, czy przez b_1, b_2). Musi być zatem $c(b) = cb$, gdzie współczynnik c jest już teraz stały. Podstawiając znalezioną postać funkcji c do wzoru (13) otrzymamy

(14) $$P(a, b) = cab.$$

Co robi we wzorze (14) współczynnik c? Jest on związany z jednostką pomiaru pola. Jeśli umówimy się, że kwadrat o boku 1 ma pole jednostkowe, to wówczas $c = 1$. Jeśli jednak np. boki prostokąta mierzyć będziemy w metrach, pole zaś w centymetrach kwadratowych, to $c = 10\,000$. Tak więc nasze rozumowanie dało nam na pole prostokąta wzór (14), ogólniejszy, niż klasyczny wzór $P = ab$, bo uwzględniający jednostki pomiaru.

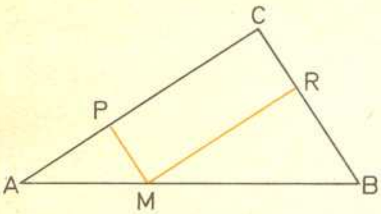
Zarazem otrzymaliśmy odpowiedź na pytania postawione na początku artykułu. O ile przyjmiemy postulaty **A**, **B**, **C**, to wzór (14) jest jedynym możliwym wzorem na pole prostokąta. Przyjęcie tych postulatów, aczkolwiek dobrze umotywowane intuicją geometryczną, zależy jednak od naszej woli.

Wróćmy teraz znów do równania (4), ale załóżmy tym razem, że funkcja niewiadoma f jest typu $f:(-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$. Możemy wówczas położyć w (4) $y = -x$ i biorąc pod uwagę związek (5) otrzymamy

(15) $$f(-x) = -f(x),$$

co oznacza, że f jest funkcją nieparzystą. Ponieważ przy wyprowadzaniu związku (7) nie korzystaliśmy z nieujemności ani x, ani f, więc związek ten jest słuszny i w obecnym przypadku, a z (15) wynika, że (7) zachodzi dla wszystkich x rzeczywistych i r wymiernych. Dalszego rozumowania, prowadzącego do wzoru (12), nie da się jednak powtórzyć, gdyż korzystało ono w bardzo istotny sposób z założenia o nieujemności funkcji f. Jeżeli założymy dodatkowo, że f jest funkcją ciągłą lub monotoniczną, to ze wzoru (8) (ważnego teraz dla dowolnych wymiernych r) wyniknie wzór (12) (ważny dla dowolnych rzeczywistych x). Jeśli jednak nie założymy o funkcji nic więcej ponadto, że spełnia ona równanie (4), to czy może mieć ona inną postać niż (12)?

Rozwiązanie zadania M 111.
Niech P i Q będą odpowiednio rzutami punktu M na boki $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.



Mamy

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MP}{BC} \text{ i } \frac{BM}{AB} = \frac{MQ}{AC},$$

skąd

$$AM^2 \cdot BC^2 = MP^2 \cdot AB^2$$
$$\text{i } BM^2 \cdot AC^2 = MQ^2 \cdot AB^2.$$

Dodając stronami te równości otrzymujemy $AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = (MP^2+MQ^2) \cdot AB^2$, a ponieważ $MP^2+MQ^2 = PQ^2 = CM^2$, więc otrzymujemy stąd żądaną równość.

Georg Hamel (1877—1954), działał w Berlinie. Autor ważnych prac z mechaniki teoretycznej i hydrodynamiki. Wniósł również wkład w teorię równań różniczkowych zwyczajnych i teorię funkcji.

Pytanie to nurtowało matematyków przez wiele lat, a odpowiedź okazała się zupełnie nieoczekiwana: zależy ona od tego, jaką matematykę przyjmiemy. Gdyż matematyka jest systemem dedukcyjnym i zależy od przyjętego układu aksjomatów. Tak, jak możemy mieć różne geometrie (geometria euklidesowa i różne geometrie nieeuklidesowe), tak też możemy mieć różne matematyki. Jeżeli do układu aksjomatów, na których oprzemy naszą matematykę, włączymy tzw. pewnik wyboru, to — jak pokazał w 1905 roku matematyk niemiecki G. Hamel — równanie (4) ma również rozwiązania nie wyrażające się wzorem (12). Istnieją jednak matematyki, w których funkcje (12) są jedynymi rozwiązaniami równania (4).

Rozwiązania równania (4), różne od funkcji (12), są bardzo nieregularne i mają bardzo osobliwe własności. Nie są one ograniczone ani z góry, ani z dołu na żadnym przedziale, ich wykresy są gęste na płaszczyźnie i nie dadzą się one zapisać efektywnym wzorem. W dalszym ciągu nie będziemy się nimi zajmowali.

Jak widzieliśmy, w klasie funkcji ciągłych jedynymi funkcjami, które mają własność (4), są funkcje liniowe jednorodne (12); są one przez tę własność (tzw. addytywność) jednoznacznie scharakteryzowane. Każda własność wyrażona przez równanie funkcyjne charakteryzuje pewne funkcje (mianowicie — rozwiązania tego równania).

Np. funkcje logarytmiczne,

$L(x) = \log_a x$, spełniają ważną zależność

$$L(xy) = L(x)+L(y). \tag{16}$$

Inaczej mówiąc, zamieniają one mnożenie na dodawanie, co ma ogromne znaczenie praktyczne. Czy istnieją jeszcze inne funkcje o tej własności?

Związek (16) można traktować jako równanie funkcyjne na funkcję $L:(0, +\infty) \to$ $\to (-\infty, +\infty)$. Dokonajmy zmiany zmiennych kładąc $f(x) = L(e^x)$. Wówczas $f(x+y) = L(e^{x+y}) = L(e^x e^y) = L(e^x)+L(e^y) = f(x)+f(y)$, tj. funkcja $f:(-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ spełnia równanie Cauchy'ego (4). Jeżeli funkcja L jest ciągła lub monotoniczna, to funkcja f również jest ciągła lub monotoniczna i, jak widzieliśmy, musi być postaci $f(x) = cx$. Wracając do starych zmiennych, otrzymamy stąd $L(x) = \log_a x$, gdzie $a = e^{1/c}$. Tak więc funkcje logarytmiczne są jedynymi funkcjami o własności (16), jeśli ograniczymy się do klasy funkcji ciągłych lub klasy funkcji monotonicznych. Jeżeli jednak dopuścimy funkcje analogiczne do hamelowskich rozwiązań równania Cauchy'ego, to w matematyce opartej na pewniku wyboru istnieją jeszcze inne funkcje spełniające związek (16), ale ze względu na swoje osobliwe własności nie mają one znaczenia praktycznego.

Podobnie przedstawia się sprawa z funkcją wykładniczą

$$A(x) = a^x.$$

Wzór $a^{x+y} = a^x a^y$, któremu odpowiada równanie

$$A(x+y) = A(x)A(y), \tag{17}$$

okazuje się charakterystyczną własnością tych funkcji. Wzór (17) uogólnia znaną własność potęg o wykładnikach naturalnych. Jeśli chcemy zdefiniować potęgę dla dowolnych wykładników rzeczywistych tak, aby zachowana była własność (17) i aby wartość potęgi zmieniała się monotonicznie ze zmianą wykładnika, możemy to zrobić w jeden tylko sposób. (Sprawdzenie tego pozostawiam Czytelnikowi).

Funkcje trygonometryczne

$$S(x) = \sin cx \text{ oraz } C(x) = \cos cx$$

(gdzie c jest dowolnie ustaloną stałą) spełniają związki

$$S(x+y) = S(x)C(y)+C(x)S(y), \tag{18}$$

$$C(x+y) = C(x)C(y)-S(x)S(y), \tag{19}$$

$$S(x-y) = S(x)C(y)-C(x)S(y), \tag{20}$$

$$C(x-y) = C(x)C(y)+S(x)S(y). \tag{21}$$

Żadne z powyższych równań nie charakteryzuje funkcji S i C w klasie funkcji ciągłych. Najbliższe tego jest równanie (21); poza funkcjami trygonometrycznymi jedynymi funkcjami ciągłymi, które spełniają to równanie, są funkcje stałe $C(x) \equiv c$ i $S(x) \equiv \pm\sqrt{c(1-c)}$. Tak więc równanie (21) charakteryzuje funkcje $S(x) = \sin cx$ i $C(x) = \cos cx$ w klasie funkcji ciągłych i niestałych. (Zwróćmy tu uwagę na interesujący fakt, że *jedno* równanie pozwala wyznaczyć *dwie* funkcje niewiadome!)

Rozwiązanie zadania M 110. Zauważmy, że dla każdej liczby naturalnej k mamy

$$\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4k^2+4k+1} < \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4k} - \frac{1}{4(k+1)}.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{4(n-1)}-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{4}.$$

Żadne z pozostałych równań — (18), (19), (20) nie ma tej własności. Np. rozwiązaniem równania (20) jest też para funkcji

$$S(x) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}], \qquad C(x) = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}],$$

(tzw. *sinus hiperboliczny* i *cosinus hiperboliczny*), jak również para funkcji liniowych

$$S(x) = qx, \qquad C(x) = 1 + px,$$

gdzie p i q są zupełnie dowolnymi stałymi.
Nawet dwa równania (18) i (19) razem nie charakteryzują funkcji trygonometrycznych. Ich rozwiązanie w klasie funkcji ciągłych ma postać

$$S(x) = e^{ax}\sin cx, \qquad C(x) = e^{ax}\cos cx,$$

gdzie stałe a i c mogą być dowolne. Funkcje trygonometryczne otrzymamy, przyjmując wartość parametru a jako zero.

Oczywiście istnieje dużo innych równań funkcyjnych, postacią i własnościami nieraz bardzo różniących się od podanych tutaj przykładów. Niektóre typy równań funkcyjnych, jak np. równania różniczkowe czy całkowe, wyodrębniły się dziś w osobne dyscypliny matematyczne. Obecnie pod nazwą „*równania funkcyjne*" rozumie się takie równania funkcyjne, w których nie występują pochodne ani całki. Nawet po tym ograniczeniu, bogactwo i rozmaitość różnych rodzajów i typów równań funkcyjnych są ogromne. Jeśli dodamy ponadto, że równania funkcyjne pojawiają się w niemal wszystkich dziedzinach matematyki, stanie się jasne, że stanowią one fascynujący przedmiot badań naukowych. Wśród pionierów tych badań znajdują się również najwybitniejsi matematycy polscy, jak Wacław Sierpiński czy Stefan Banach. A dzisiaj w badaniach nad równaniami funkcyjnymi matematycy polscy odgrywają czołową rolę na świecie.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 109. Na płaszczyźnie dany jest zbiór n punktów ($n \geq 2$), przy czym odległość dowolnych dwóch punktów tego zbioru jest nie większa od 1. Udowodnić, że zbiór ten jest zawarty w pewnym kwadracie o boku długości 1.
Rozwiązanie na str. 10

M 110. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

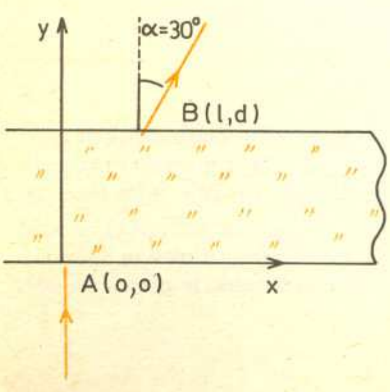
Rozwiązanie na str. 5

M 111. Udowodnić, że jeżeli M jest punktem wewnętrznym przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC, to

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = CM^2 \cdot AB^2.$$

Rozwiązanie na str. 4

Redaguje dr hab. Andrzej SZYMACHA



F37. Na płytkę płaskorównoległą, której współczynnik załamania n zmienia się według wzoru

$$n(x) = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}} = \frac{1{,}2}{1 - \frac{x}{13\ [\mathrm{cm}]}}$$

pada w punkcie A(0, 0), prostopadle do płytki, promień światła. Promień opuszcza płytkę w punkcie B(l, d) pod kątem $\alpha = 30°$ (patrz rysunek). Wyznaczyć grubość płytki d oraz odległość l punktu B od osi y. Po jakim torze porusza się promień wewnątrz płytki?
Rozwiązanie na str. 11
(zadanie z VII Międzynarodowej Olimpiady Fizycznej, autor dr hab. A. Szymacha)