Równania Maxwella

Doc. dr Tomasz HOFMOKL

Całą klasyczną teorię elektromagnetyzmu można zapisać za pomocą czterech równań podanych w 1873 r. przez Jamesa Clarka Maxwella. Jest rzeczą fascynującą przekonać się jak pozornie niezależne zjawiska okazują się być powiązane. Tęcza na niebie, rozchodzenie się fal radiowych, przyciąganie się naelektryzowanych kulek — to wszystko można wyjaśnić na gruncie teorii Maxwella. Równań Maxwella nie ma w programie szkolnym i nie może być. Zrozumienie ich i wykorzystanie wymaga znajomości metod matematycznych nie znanych w szkole. W tym numerze „Delty" w artykule div[rot(grad φ)] $\equiv 0$ M. Grudnicki wprowadza niezbędny aparat matematyczny. Skorzystajmy z tego i pobawmy się nieco równaniami. Pokażemy, jak można wyprowadzić z nich znane nam prawo Coulomba oddziaływania ładunków elektrycznych i jak obliczyć indukcję pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem. Potrzebujemy do tego twierdzenia Gaussa, twierdzenia Stokesa — no i równań Maxwella.

Dokonajmy ich prezentacji w postaci w jakiej opisują pole elektromagnetyczne w próżni. Równania Maxwella

$$1.\quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0};\qquad 2.\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$3.\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0;\qquad 4.\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2},$$

gdzie

$\boldsymbol{E}$ — wektor natężenia pola elektrycznego. Siła działająca na ładunek q w polu o natężeniu $\boldsymbol{E}$ wynosi $\boldsymbol{F} = q\cdot\boldsymbol{E}$,

$\boldsymbol{B}$ — wektor indukcji magnetycznej. Siła działająca na ładunek q poruszający się z prędkością $\boldsymbol{v}$ w polu o indukcji $\boldsymbol{B}$ wynosi $\boldsymbol{F} = q\cdot\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$,

$\boldsymbol{j}$ — gęstość prądu. Wektor ten jest skierowany w kierunku ruchu ładunków dodatnich i równa się co do wartości bezwzględnej natężeniu prądu na jednostkę powierzchni S ustawioną prostopadle do kierunku prądu $|\boldsymbol{j}| = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}$,

ϱ — gęstość objętościowa ładunku elektrycznego $\varrho = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$,

c — prędkość światła,

ε_0 — stała dielektryczna próżni.

Wiemy już co oznaczają poszczególne symbole. Zwróćmy więc uwagę, że wszystkie równania określają związki między $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{j}$, ϱ w dowolnym punkcie przestrzeni. Nie występują tu ani przewodniki ani obwody ani nawet ładunki. Wszystkie wielkości charakteryzują jeden punkt w przestrzeni i formalnie nie interesują się własnościami sąsiadów.

Postawiliśmy sobie na wstępie dwa zadania — jedno z elektrostatyki a drugie z magnetyzmu. Możemy więc równania znacznie uprościć zakładając, że natężenie pola elektrycznego i indukcja magnetyczna nie zmieniają się w czasie:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0;\qquad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0.$$

Równania przybierają postać

$$1.\quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\qquad 2.\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0$$

$$3.\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0\qquad 4.\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$$

$\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}\right.$ oznaczamy literą μ_0 i nazywamy przenikalnością magnetyczną próżni$\Big)$.

Dwa pierwsze równania opisują elektrostatykę, a pozostałe dwa magnetostatykę. Jak je zastosować?

PRAWO COULOMBA

W pewnym punkcie przestrzeni umieszczamy ładunek Q. Pytamy, czemu równa się natężenie pola elektrostatycznego w odległości R. Z symetrii problemu wynika, że wartość natężenia pola musi być co do wartości bezwzględnej taka sama we wszystkich punktach na powierzchni $\mathscr{S}$ kuli $\mathscr{V}$ o promieniu R. Wektor $\boldsymbol{E}$ musi być skierowany wzdłuż promienia. Jeżeli ładunek Q jest dodatni, to $\boldsymbol{E}$ jest skierowane na zewnątrz kuli. Pozostaje obliczenie wartości $E = |\boldsymbol{E}|$. Skorzystajmy z

kula o promieniu R

1. Twierdzenia Gaussa

$$\iint_{\mathscr{S}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\mathscr{V}} \operatorname{div}\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V,$$

gdzie $\boldsymbol{n}$ oznacza wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni $\mathscr{S}$ kuli $\mathscr{V}$, oraz

2. Równania Maxwella

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}.$$

Wektor $\boldsymbol{E}$ jest wszędzie prostopadły do powierzchni kuli, więc $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = 4\pi R^2 \cdot E$,

$$4\pi R^2 E = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}\,\mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Stąd

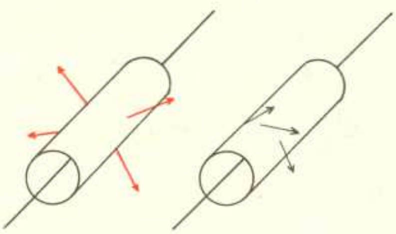
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Siła działająca na ładunek q w odległości R od ładunku Q

$$F = q\cdot E = \frac{q\cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

A to jest właśnie zapis prawa Coulomba. Otrzymaliśmy je jako szczególny przypadek równań Maxwella.

POLE MAGNETYCZNE PRZEWODNIKA Z PRĄDEM



a b

W długim prostoliniowym przewodniku płynie prąd o natężeniu I. Wartość wektora indukcji jest na powierzchni walca o długości d i o promieniu R wszędzie taka sama. Nie możemy jednak nic powiedzieć, jak jest skierowany wektor $\boldsymbol{B}$. Może być albo wzdłuż promienia (a) albo prostopadle do promienia i w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca (b). Pokażemy, że tylko drugi wariant jest możliwy.

W pierwszym przypadku (a)
z twierdzenia Gaussa mamy

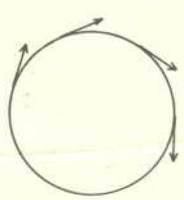
$$\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{0}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S_1 + \iint_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S_2 = 2\pi R B d = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V.$$

gdzie $\mathcal{S}$ — powierzchnia walca $\mathcal{V}$, $\mathcal{S}_1$ — „denka" walca, $\mathcal{S}_2$ — powierzchnia boczna. Podobnie jak poprzednio $\boldsymbol{n}$ oznacza wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni. Z równania Maxwella $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$, a więc

$$2\pi R B d = 0,$$

skąd $\boldsymbol{B} = 0$.

Wektor indukcji magnetycznej nie może mieć w tym przypadku składowej wzdłuż promienia. Nie rozważamy również składowej wzdłuż walca. Jej rotacja równa się zero i nie może być wywołana przez przepływ prądu w badanym przewodniku. Jej źródłem musiałyby być jakieś inne przewodniki z prądem, których nie rozważamy. Pozostaje nam tylko takie ułożenie wektora $\boldsymbol{B}$, jak w przypadku (b). Zastosujemy twierdzenie Stokesa



$$\int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest powierzchnią ograniczoną krzywą $\mathcal{L}$. Ponieważ $\boldsymbol{B}||\mathrm{d}\mathrm{L}$, a $\boldsymbol{B}$ jest stałe, więc

$$\int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 2\pi R B.$$

Z równania Maxwella
$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

Ponieważ $\boldsymbol{j}||\boldsymbol{n}$, więc

$$\mu_0 \iint \boldsymbol{j}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \mu_0 \iint j\,\mathrm{d}S = \mu_0 I.$$

Ostatecznie

$$2\pi R B = \mu_0 I$$

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi R}.$$

Rozważyliśmy dwa najprostsze zagadnienia znane z materiału szkolnego z elektrostatyki i magnetyzmu. Chciałbym, abyś Czytelniku umiał dostrzec poza przesłoną żmudnych dla nie wprawionego rachunków piękno prostoty równań Maxwella. Tak niewiele symboli potrzeba, aby ująć w jedną całość obszerny materiał doświadczalny. Im dalej posuwa się nasza wiedza, tym większe uogólnienie można tworzyć, tym jaśniej widać związek między wszystkimi zjawiskami przyrody.