Jak pies gonił zająca

Dr Wiesław KUFEL

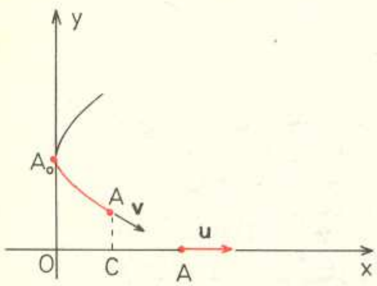
Rachunek wariacyjny (klasyczny) obejmuje metody szukania największych i najmniejszych wartości funkcjonałów tj. funkcji, w których rolę zmiennej niezależnej spełniają krzywe albo funkcje. Zaczął się rozwijać w 1696 roku, w którym Jean Bernoulli opublikował list z zadaniem (sformułowanym obok) o linii najkrótszego spadku, tzw. brachistochronie.

W mechanice obok mechaniki analitycznej wyróżniamy mechanikę ciała sztywnego badającą rozkłady naprężeń i odkurczeń, mechanikę płynów, zajmującą się ciśnieniem, przepływami i opływami ciał, mechanikę gruntów, która bada cechy fizyczne gruntu i jego zachowanie się pod wpływem obciążeń itd.
W Uniwersytecie Warszawskim na Wydziale Matematyki i Mechaniki istnieje jedyny w Polsce uniwersytecki kierunek studiów poświęcony mechanice.

Ciekawość jest tą cechą człowieka, która spowodowała, chyba w największym stopniu, że nauka postawiła i rozwiązała tak dużo już problemów. Ciekawość Newtona — dlaczego jabłko spada z drzewa? — doprowadziła do powstania, a następnie burzliwego rozwoju mechaniki klasycznej, ciekawość Bernoulliego — jak zjechać (np. na nartach) po zboczu góry, by znaleźć się najszybciej w ustalonym punkcie u jej podnóża? — spowodowała powstanie rachunku wariacyjnego, itd. W tym artykule pragniemy się zająć pytaniami, które pewnie nie doprowadzą do powstania żadnej nowej teorii, ale mogą się okazać ciekawe. Otóż zdarza się, że pies goni zająca. Nic na to nie poradzimy. Od nas natomiast zależy w jakim stopniu fakt ten jest interesujący. Interesować się bowiem możemy nie tylko tym, czy pies złapie zająca, ale i czasem, w którym pościg się uda, warunkami na to, by pościg się nie udał, itd.

Odpowiedzi na te pytania poszukiwać będziemy w mechanice. Dla wielu ludzi mechanika kojarzy się z wałem korbowym, uszczelką w kranie, czy też napisami na szyldach ,,mechanika pojazdowa", ,,mechanika precyzyjna". Ta mechanika, o której tu mowa, jest krótko mówiąc nauką o ruchu i równowadze ciał materialnych. W otaczającym nas świecie wyróżniamy różne obiekty: wodę, kamień, jabłko, Ziemię. Obok różnych swoich cech mają one tę, że zajmują (wypełniają sobą) miejsce w przestrzeni. Wiemy, że wypełnianie to różnie wygląda i zależy od sposobu patrzenia: jeśli patrzymy gołym okiem, jest ciągłe (bez dziur), jeśli spojrzymy przez mikroskop może być nieciągłe (np. w kamieniu pojawią się otwory), z kolei jeśli popatrzy się na nie z dostatecznie dużej odległości obiekty zmaleją i mogą być utożsamiane z punktami. Mechanikę badającą ruch i równowagę punktów nazywa się mechaniką analityczną (teoretyczną). Tak więc w mechanice analitycznej realnym obiektom materialnym przyporządkowujemy punkty lub układy punktów.

W ten sposób postąpimy w naszym przypadku: uciekającego zająca i goniącego go psa utożsamimy z dwoma punktami w przestrzeni kartezjańskiej R^3. Ruch tych punktów opisywać będziemy zależnościami współrzędnych położenia od czasu $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Zgodnie z definicją, prędkością poruszającego się punktu nazywać będziemy wektor $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ o składowych równych pochodnym współrzędnych położenia względem czasu. Długość wektora prędkości nazywać będziemy szybkością. Po tych uwagach przejdźmy do rozwiązania problemu pogoni. Dla uproszczenia zagadnienia założymy, że teren, po którym biegnie pies i zając jest płaski, szybkość psa i zająca jest stała oraz że prędkość zająca ma stały kierunek. Problem pogoni można więc teraz sformułować w następujący sposób: wyznaczyć tor (krzywą) punktu A poruszającego się w płaszczyźnie (x, y) z prędkością $\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, $|\boldsymbol{v}| = \text{const.}$, stale skierowaną ku punktowi B poruszającemu się w tej płaszczyźnie ze stałą prędkością $\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{u} = \text{const}$. Stały wektor prędkości $\boldsymbol{u} = \text{const}$ wyznacza na płaszczyźnie pewien kierunek, który będzie zgodny z kierunkiem osi x. Punkt B (punkt uciekający) porusza się więc po tej osi. Oś y poprowadzimy tak, by przechodziła przez pewien punkt A_0, w którym prędkość punktu A (punktu goniącego) była prostopadła do osi (rysunek obok). Ustalmy ponadto, że czas zaczynamy liczyć od chwili, gdy punkt A znajdował się w położeniu A_0.

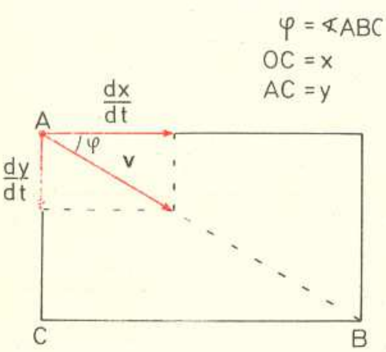


Rozpatrzmy najpierw przypadek, kiedy zwrot osi x jest zgodny ze zwrotem wektora $\boldsymbol{u}$. Dzieląc drogę punktu A równą $\overset{\frown}{A_0A} = s$ oraz drogę punktu B równą OB przez odpowiednie szybkości otrzymujemy ten sam czas t:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{OB}{u}, \quad \text{gdzie } v = |\boldsymbol{v}|,\ u = |\boldsymbol{u}|. \tag{1}$$

Rozłóżmy wektor prędkości $\boldsymbol{v}$ na składowe $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$ Z trójkąta ABC mamy

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\varphi, \quad \frac{dy}{dt} = -v\sin\varphi. \tag{2}$$



W ostatniej równości napisaliśmy znak minus, gdyż zwrot $\frac{dy}{dt}$ jest przeciwny do zwrotu osi y (rysunek obok).

Ponieważ $\cos\varphi = \frac{OB - OC}{AB} = \frac{ut - x}{AB}$, $\sin\varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{y}{AB}$,

po podstawieniu tych wyrażeń do (2) i podzieleniu stronami równań (2) mamy

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-ut + x}{y}. \tag{3}$$

Równanie (3) można przepisać w innej postaci

$$x - \frac{dx}{dy}y = \varepsilon s, \tag{4}$$

gdzie oznaczono: $\varepsilon = \frac{u}{v}$ a za t podstawiono zgodnie z (1) $\frac{s}{v}$.

Krzywa pogoni — krzywa, po której porusza się punkt A — opisana jest związkami $x = x(t)$ oraz $y = y(t)$. Nie jest to jedyny sposób jej przedstawienia. Wyliczając np. z równania $y = y(t)$ czas i podstawiając do związku $x = x(t)$ otrzymujemy zależność $x = x(t(y)) = x(y)$. W dalszym ciągu współrzędną x będziemy tak właśnie rozumieć: jako funkcję y. Zróżniczkujmy obie strony (4) względem y:

$$-\frac{d^2x}{dy^2}\,y = \varepsilon\frac{ds}{dy}. \tag{5}$$

Ponieważ $ds^2 = dx^2+dy^2$, więc $\frac{ds}{dy} = -\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ (bierzemy znak minus, gdyż ze wzrostem y długość s maleje) równanie (5) można przepisać w postaci

$$\varepsilon\frac{dy}{y} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \text{gdzie} \quad p = \frac{dx}{dy}. \tag{6}$$

Całkując równanie (6) mamy

$$\varepsilon\ln y + c = \ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right). \tag{7}$$

Niech $OA_0 = a$, wtedy dla $y = a$, $p = \frac{dx}{dy} = 0$. Wynika to stąd, że oś x była poprowadzona jako styczna do krzywej $x = x(y)$ w punkcie A_0. Uwzględniając ten warunek, z równania (7) otrzymujemy $c = -\varepsilon\ln a$. Podstawiając wyliczoną stałą c do równania (7) mamy

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{\varepsilon} = p+\sqrt{1+p^2}. \tag{8}$$

Przeprowadzone rozumowanie, w wyniku którego otrzymaliśmy równanie (8), można powtórzyć dla przypadku, w którym zwrot osi x jest przeciwny do zwrotu wektora $\boldsymbol{u}$. Otrzymamy wtedy (dowód jest analogiczny) równanie:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon} = -p+\sqrt{1+p^2}. \tag{9}$$

Odejmując i dodając kolejno stronami równania (8) i (9) i uwzględniając, że $p = \frac{dx}{dy}$ otrzymamy

$$2\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y}{a}\right)^{\varepsilon} - \left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon}, \qquad 2\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \left(\frac{y}{a}\right)^{\varepsilon} + \left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon}.$$

Pierwsze równanie po scałkowaniu daje nam równanie toru

$$\begin{aligned} 2x+c_1 &= \frac{y^{1+\varepsilon}}{a^{\varepsilon}(1+\varepsilon)} - \frac{y^{1-\varepsilon}}{a^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)} \quad && \text{dla} \quad \varepsilon \neq 1, \\ 2x+c_2 &= \frac{y^2}{2a} - a\ln y && \text{dla} \quad \varepsilon = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Stałe c_1 i c_2 wylicza się wykorzystując (10) i uwzględniając warunek: $x = 0$ gdy $y = a$.

Po prostych rachunkach otrzymuje się związki: $c_1 = -\frac{2a\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$, $\quad c_2 = \frac{a}{2} - a\ln a$.

Równanie drugie pozwala wyliczyć odległość między punktami A, B, mamy bowiem

$$AB = \pm\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,y, \qquad \text{gdyż} \quad \frac{AB^2}{AC^2} = 1+\frac{CB^2}{AC^2} = 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \tag{11}$$

Podstawiając $(10)_2$ do (11) otrzymujemy ostatecznie:

$$AB = \pm\frac{1}{2}\left[\frac{y^{\varepsilon+1}}{a^{\varepsilon}} + \frac{a^{\varepsilon}}{y^{\varepsilon-1}}\right]. \tag{12}$$

Analizując równanie (12) toru pościgu można wykazać, że dla $\varepsilon > 1$ (tj. w przypadku, gdy szybkość punktu uciekającego jest większa od szybkości punktu goniącego) odległość AB rośnie nieograniczenie, gdy y dąży do zera. Dla $\varepsilon = 1$ (szybkości są równe) odległość ta dąży do $a^2/2$. W tych dwu przypadkach oś x jest asymptotą toru i punkty się nigdy nie spotkają. Jeśli natomiast $\varepsilon < 1$, tor pościgu przecina oś x w punkcie $(x_0, 0)$, gdzie x_0 (wzór (10)) równa się: $x_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{a^{\varepsilon}}{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{a^{\varepsilon}(1+\varepsilon)} - \frac{1}{a^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)}\right]$.

Znając współrzędną punktu spotkania x_0 można wyliczyć (wzór (11)) czas potrzebny do zakończenia pościgu: $\quad t = AB/u = x_0/u$.

Otrzymane odpowiedzi rozwiązują problem pościgu zająca.

Zastosowany tutaj język matematyki (oprócz precyzji sformułowania zadania) pozwala wykorzystać wyniki do innych ale podobnych zagadnień.

Rozwiązanie zadania **M 105.** Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej.

Dla $n = 3$ dana nierówność przyjmuje postać

$$1+\frac{1}{2} > \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}.$$

Prawa jej strona równa jest

$$\frac{1}{2520}(840+630+504+420+360+315+280) = \frac{3349}{2520} < \frac{3}{2}$$

Dla $n = 3$ dana nierówność jest więc prawdziwa.

Zauważmy teraz, że jest

$$(*) \quad \left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right)+\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+2n+1}\right) < \frac{n}{n^2+1}+\frac{n+1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n}+\frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

(każdy składnik w nawiasie jest nie większy od pierwszego). Załóżmy teraz, że dla pewnego n zachodzi dana nierówność. Wówczas

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n} > \frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}$$

(skorzystaliśmy z nierówności (*)).

Tak więc na mocy zasady indukcji matematycznej dana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$. Łatwo sprawdzić, że dla $n = 2$ jest ona fałszywa.