

Zagadnienia wywodzące się z nauk przyrodniczych i wchodzące w zakres badań matematyków charakteryzują się tym, że przestają być jasne intuicyjnie, ale zyskują na przejrzystości matematycznej. Wynika to z wprowadzenia dość dużego stopnia abstrakcji, pozwalającej na ściśle i poprawne formułowanie ważnych definicji i dalsze badania za pomocą aparatu matematycznego. Taka sytuacja jest np. w geometrii, która wywodząc się z czysto praktycznej wiedzy, stała się obecnie dyscypliną zupełnie niezależną od praktyki.

W mechanice klasycznej związki ze światem „rzeczywistym” są nieco silniejsze, ale obecnie należy ją również traktować jako dział matematyki, a nie fizyki. Na bazie modelu fizycznego została tu bowiem stworzona teoria matematyczna i przy jej rozwijaniu można obejść się bez odwoływania się do intuicji fizycznej. Jednakże czasem znajomość interpretacji pewnych pojęć jest niezwykle cenna. Dlatego też chciałbym przypomnieć sens fizyczny niektórych definicji, występujących w teorii pola.

Polem w mechanice nazywamy funkcję $\varphi: \Omega \rightarrow Y$, gdzie Ω jest pewnym zbiorem punktów przestrzeni (lub płaszczyzny), natomiast Y może być zbiorem liczb rzeczywistych lub zbiorem wektorów. W zależności od Y otrzymujemy pole skalarne lub pole wektorowe. Tak więc pole skalarne jest funkcją, która punktom przyporządkowuje liczby, a pole wektorowe — funkcją przyporządkowującą punktom wektory. Jeżeli w przestrzeni (na płaszczyźnie) wprowadzony jest układ współrzędnych, to każdemu punktowi można przyporządkować uporządkowaną trójkę (parę) liczb i pole staje się funkcją trzech (dwóch) zmiennych liczbowych. Jednakże przy przechodzeniu do innego układu współrzędnych funkcja ta ulega zmianie. Żeby podkreślić, że pole nie zależy od wprowadzonego układu współrzędnych zachowuje się nazwę „pole” zamiast funkcji. Przykładem pola skalarnego może być pole temperatury atmosfery, pole gęstości masy jakiegoś ciała, pole wysokości nad poziom morza itd. Przykładem pola wektorowego może być pole prędkości cieczy w kanale, pole siły ciężkości itd.

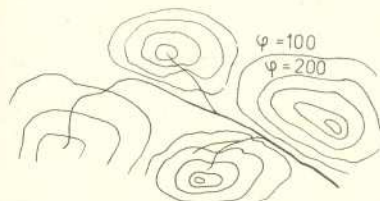
Dla ułatwienia opisu wprowadźmy i ustalmy pewien prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich.

Niech wektor r zaczepiony w początku układu współrzędnych i końcu w punkcie p , ma składowe x, y, z (na płaszczyźnie odpowiednio $r = [x, y]$). Ponieważ istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między r i punktem p o współrzędnych x, y, z (lub x, y), będę w dalszym ciągu używał wektora r dla określenia punktu p mimo, że są to zupełnie inne pojęcia geometryczne.

Na początku zajmiemy się polem skalarnym $\varphi(p)$. Oznaczmy

$$\varphi(p) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} f(r).$$

Pole skalarne można całkowicie scharakteryzować podając zbiór powierzchni (linii w przypadku dwuwymiarowym), na których ma ono stałą wartość oraz podając wartość odpowiadającą danej linii. Taki sposób jest często stosowany w przypadku dwuwymiarowym np. przy określaniu poziomicy na mapie.



Gradient

W celu badania pola skalarnego metodami analizy matematycznej wygodnie jest wprowadzić pochodną kierunkową pola φ . Pochodną kierunkową pola w punkcie p i w kierunku wektora jednostkowego l nazywamy (o ile istnieje) liczbę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(p_1) - \varphi(p)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\varphi}{dl},$$

gdzie h jest odległością między punktami p_1 i p oraz punkt p_1 leży na półprostej o kierunku wektora l , wychodzącej z punktu p . Pochodna kierunkowa w myśl definicji nie zależy od wyboru układu współrzędnych, ale można ją w danym układzie współrzędnych zapisać

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{df}{dl} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h}.$$

Jeżeli $f(r+h)$ będziemy traktować jako funkcję złożoną zmiennej h , to

$$\frac{df}{dl} = \left. \frac{df(r+h)}{dh} \right|_{h=0} = \frac{\partial f}{\partial x} l_x + \frac{\partial f}{\partial y} l_y + \frac{\partial f}{\partial z} l_z = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \cdot l, \quad \text{gdzie } l = [l_x, l_y, l_z].$$

Ponieważ lewa strona tej równości nie zmienia się przy przejściu do innego układu współrzędnych, więc musi zachowywać się także prawa strona. Zatem trójka liczb

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ oznacza w danym układzie kartezjańskim składowe pewnego wektora

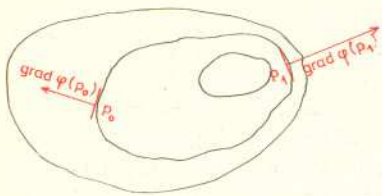
w punkcie x, y, z . Wektor ten nazywamy *gradientem* pola skalarnego i oznaczamy symbolem

$$\text{grad } \varphi = \text{grad } f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right].$$

Y może być zbiorem innych jeszcze obiektów, np. tensorów, ale nie będziemy się tu nimi zajmować (o tensorach — w przyszłym roku).

Umawiamy się przy tym, że wektor przyporządkowany punktowi jest zaczepiony w tym właśnie punkcie.





Łatwo zauważyć, że w innym prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich, w którym $\varphi(p) = f_1(r_1)$ gradient ma inne składowe: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \frac{\partial f_1}{\partial z_1}$ (tzn. nie zmienia się sposób ich obliczania). Operację obliczania gradientu zapisuje się czasami za pomocą symbolu $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Pochodną funkcji można interpretować jako szybkość zmiany tej funkcji, np. pochodna drogi względem czasu jest szybkością zmiany drogi tzn. zwykłą prędkością. Zatem pochodna kierunkowa w punkcie p oznacza szybkość zmiany pola w tym punkcie w kierunku wektora l . Ze wzoru $\frac{d\varphi}{dt} = l \cdot \text{grad } \varphi$ oraz definicji iloczynu skalarnego wektorów

$$l \cdot \text{grad } \varphi = |l| |\text{grad } \varphi| \cos \alpha = |\text{grad } \varphi| \cos \alpha$$

(α jest kątem między wektorem l i $\text{grad } \varphi$, pionowe kreski oznaczają długości wektorów i $|l| = 1$) wynika, że gradient pola skalarnego wyznacza kierunek najszybszej zmiany pola w danym punkcie, a jego długość określa szybkość tej zmiany.

Zauważyć należy jeszcze, że jeżeli wektor l leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni $\varphi = \text{const}$, to $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, co oznacza, że gradient jest wektorem prostopadłym do l , a więc do

tej powierzchni. Jeżeli powierzchnie (lub linie) jednakowej wartości pola zagęszczają się w pobliżu jakiegoś punktu, to w tym punkcie wartość gradientu jest większa niż w punkcie, w pobliżu którego powierzchnie (linie) są w większej odległości (rysunek obok).

Jak widzimy pole skalarnie wyznacza pewne pole wektorowe (pole gradientu) dość dokładnie je charakteryzujące.

Pole wektorowe A , które można traktować jako pole gradientu pewnego pola skalarnego φ , nosi nazwę pola potencjalnego, zaś pole φ nazywamy wtedy potencjałem pola A .

Przykładem pola potencjalnego może być pole siły grawitacyjnej. Potencjał w tym przypadku nazywa się energią potencjalną masy jednostkowej.



Dywergencja

Mając pole wektorowe A można związać z nim pole skalarnie, stanowiące pewną charakterystykę danego pola wektorowego. Przykładem takiego pola jest dywergencja. Zaczniemy od przykładu fizycznego. W pewnym obszarze dany jest stacjonarny przepływ cieczy nieściśliwej (gęstość ρ jest stała). Prędkość w każdym punkcie tej cieczy określa pewne pole wektorowe V . Jeżeli w tym polu umieścimy powierzchnię S , to możemy badać ilość $m = \rho Q$ cieczy przez nią przepływającej. Jeżeli można powierzchnię podzielić na k elementów o polach $S_i, i = 1, 2, \dots, k$, na których V_{ni} (składowa wektora V w kierunku prostopadłym do i -tego elementu) ma stałą wartość, to objętość cieczy przepływającej przez powierzchnię S w jednostce czasu wynosi:

$$Q = \sum_{i=1}^k V_{ni} S_i = \sum_{i=1}^k (V \cdot n_i) S_i,$$

gdzie n_i jest wektorem jednostkowym prostopadłym do i -tego elementu powierzchni.

W ogólnym przypadku zamiast sumy należy stosować całkę powierzchniową $Q = \iint_{\mathcal{S}} V \cdot n dS$,

gdzie n jest wektorem normalnym do powierzchni, tzn. wektorem jednostkowym prostopadłym do niej. W związku z występowaniem w powyższych wzorach wektora normalnego do powierzchni, należy jednoznacznie wybierać zwrot tego wektora. Dla naszych celów wystarczy powiedzieć, że będzie to normalna zewnętrzna, gdyż będziemy rozważać tylko powierzchnie zamknięte.

Strumieniem pola wektorowego A przez powierzchnię S nazywamy całkę powierzchniową

$$\iint_{\mathcal{S}} A \cdot n dS.$$

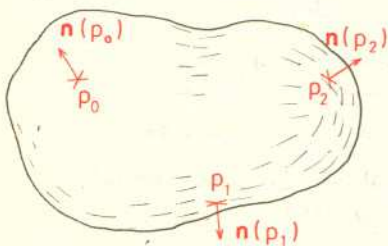
W przypadku pola prędkości cieczy nieściśliwej jest to, jak już zauważyliśmy, objętość zajmowana przez ciecz przepływającą przez powierzchnię w jednostce czasu.

Niech \mathcal{S} będzie ustaloną powierzchnią zamkniętą, p — ustalonym punktem wewnątrz \mathcal{S} . Przez \mathcal{S}_τ oznaczymy powierzchnię jednokładną z \mathcal{S} względem p taką, że bryła ograniczona przez \mathcal{S}_τ ma objętość τ . Możemy wtedy badać istnienie granicy

$$(*) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_{\mathcal{S}_\tau} A \cdot n dS.$$

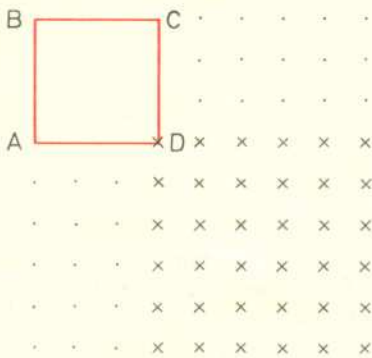
Gdy $\tau \rightarrow 0$, cała bryła ściąga się do punktu p . Jeżeli dla dowolnej powierzchni \mathcal{S} granica (*) istnieje i jest taka sama dla wszystkich \mathcal{S} , to granica ta określa w punkcie p wartość pewnego pola skalarnego.

Nie podajemy tu ścisłej definicji całki powierzchniowej. Przybliżoną wartość takiej całki — o ile całka ta istnieje — można znaleźć wpisując w powierzchnię S wielościan o bardzo małych powierzchniach ścian, zakładając, że funkcja podcałkowa jest stała na każdej ze ścian, a następnie obliczając wielkość Q zdefiniowaną poprzednim wzorem. (Warto przy tym zauważyć, że $\iint_{\mathcal{S}} 1 dS$ jest wobec tego polem powierzchni \mathcal{S} .)





Rozwiązanie zadania M 103. Obliczmy, ile jest różnych kwadratów $k \times k$. Aby uzyskanie odpowiedzi na to pytanie uczynić bardziej pogładowym przyjmijmy $n = 9$ $k = 4$.



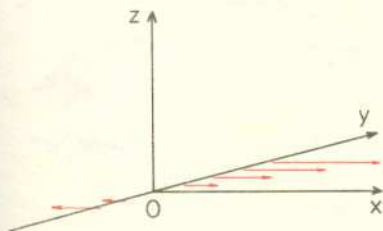
Dowolny kwadrat 4×4 otrzymamy przesuwając kwadrat narysowany tak, aby wierzchołek D znalazł się w jednym z punktów oznaczonych krzyżykiem. Punktów tych jest 6^2 . Ogólnie kwadratów $k \times k$ na szachownicy $n \times n$ jest $(n-k+1)^2$. Wszystkich kwadratów na szachownicy jest więc

$$\sum_{k=1}^n (n-k+1)^2 = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Ostatnią równość można łatwo udowodnić przez indukcję.

Nie podajemy tu ścisłej definicji całki krzywoliniowej. Przybliżoną wartość takiej całki — o ile istnieje — można obliczyć zastępując krzywą przez wpisaną w nią łamaną, złożoną z bardzo krótkich odcinków, a funkcję podcałkową — funkcją, która na każdym z tych odcinków jest stała i mało różni się od funkcji podcałkowej (Wyrażenie $\int_{\mathcal{L}} 1 dL$ jest wobec tego długością krzywej \mathcal{L} .)

„ \times ” oznacza iloczyn wektorowy: jeśli w przestrzeni trójwymiarowej dane są wektory a i b , to $a \times b$ jest takim wektorem, który (1) jest prostopadły do a i do b ; (2) ma długość równą polu równoległoboku rozpiętego na a i b ; (3) ma taki zwrot, że trójka $a, b, a \times b$ zorientowana jest dodatnio. Np. $[1, 0, 0] \times [0, 1, 0] = [0, 0, 1]$ ale $[0, 1, 0] \times [1, 0, 0] = [0, 0, -1]$.



Pole to nazywamy *dywergencją* pola wektorowego A :

$$(\operatorname{div} A)(p) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_{\mathcal{S}_\tau} A \cdot n dS.$$

Jeżeli wprowadzony jest prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich, to można pokazać (wykorzystując twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego), że

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{gdzie } A(p) = [P(p), Q(p), R(p)].$$

Powróćmy jeszcze raz do przykładu cieczy nieściśliwej i wybierzmy jednostki tak, aby $\varrho = 1$. Wówczas strumień $\iint_{\mathcal{S}} V \cdot n dS$ przez zamkniętą powierzchnię \mathcal{S} oznacza ilość cieczy,

kątra powstała lub znikła w obszarze ograniczonym powierzchnią. Jeżeli w obszarze tym nie ma źródeł lub źródeł ujemnych (upustów) cieczy, to strumień przez taką powierzchnię jest zerowy. W przeciwnym przypadku daje nam wielkość określoną jako moc źródeł (upustów). Zatem dywergencja pola prędkości cieczy nieściśliwej może być interpretowana jako gęstość źródeł (upustów) w danym punkcie. Interpretacja dywergencji innych pól wektorowych, np. pola siły grawitacji, pola elektrostatycznego itd. wymaga szerszego zastosowania aparatu matematycznego i dlatego nie będę jej tu przytaczał. Osoby zainteresowane odsyłam do literatury specjalistycznej np. A. И. Борисенко, И. Е. Тарапов: *Векторный анализ и начало тензорного исчисления*, Б. М. Бурак, С. В. Фомин: *Кратные интегралы и ряды*.

Rotacja

Jeżeli F jest stałym polem siłowym a \mathcal{L} pewnym odcinkiem równoległym do F , to iloczyn $|F| \cdot \mathcal{L}$ daje pracę siły F na drodze \mathcal{L} . W ogólnym przypadku dla określenia pracy musimy wziąć całkę krzywoliniową ze składowej stycznej F_τ wektora F wzdłuż krzywej \mathcal{L} . Uogólniając to pojęcie na przypadek dowolnego pola wektorowego wprowadzamy definicję:

Cyrkulacją pola wektorowego A nazywamy całkę $\int_{\mathcal{L}} A_\tau dL$, gdzie A_τ jest składową wektora A styczną do krzywej \mathcal{L} . Wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych, w którym $A(p) = [P(p), Q(p), R(p)]$. Dla krzywej zamkniętej \mathcal{L} całkę $\int_{\mathcal{L}} A_\tau dL$ można sprowadzić do całki powierzchniowej (korzystając z tw. Stokesa):

$$\int_{\mathcal{L}} A_\tau dL = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx$$

po powierzchni \mathcal{S} ograniczonej krzywą \mathcal{L} .

„Wektor” o składowych $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ w tym układzie

współrzędnych nazywamy *rotacją (wirum)* pola wektorowego A i oznaczamy symbolem $\operatorname{rot} A$. Z własności całki powierzchniowej wynika, że prawa strona ostatniej równości jest równa $\iiint_{\mathcal{V}} (\operatorname{rot} A) \cdot n dS$. Oznacza to, że cyrkulacja pola wektorowego A wzdłuż krzywej zamkniętej

jest równa strumieniowi pola wektorowego $\operatorname{rot} A$ przez powierzchnię \mathcal{S} . Rotacja, w odróżnieniu od poprzednich pojęć, została wprowadzona przy pomocy konkretnego układu współrzędnych. Można pokazać, że jeżeli ograniczymy się do układów o ustalonej orientacji, to jest ona wielkością niezależną od układu. Jednakże przy zmianie orientacji układu zmienia znak. Rotacja pola charakteryzuje „składową obrotową” pola wektorowego. Sens tego pojęcia wyjaśnię na kilku przykładach.

1) Ciało sztywne obracające się z prędkością kątową ω określa pewne pole wektorowe prędkości V wzorem $V = \omega \times r$, gdzie wektor r jest „promieniem wodzącym” punktu ciała. Określmy prostokątny układ współrzędnych, w którym $r = [x, y, z]$. Po wykonaniu obliczeń okazuje się, że $\operatorname{rot} V = 2\omega$.

Zatem rotacja w tym przypadku określa obrót ciała.

2) Ciecz porusza się ze stałą prędkością, tzn. pole prędkości $V = [P, Q, R]$ ma stałe składowe. Rotacja jest w tym przypadku równa zero i nie występuje żaden ruch obrotowy. Ciecz porusza się prostoliniowo.

3) Ciecz porusza się z prędkością $V = [y, 0, 0]$, (tzn. im dalej od płaszczyzny X, Z tym większa jest prędkość cieczy); $\operatorname{rot} V = [0, 0, -1]$. W tym przypadku ciecz porusza się także prostoliniowo i pozornie nie ma żadnego obrotu wbrew temu, że rotacja, charakteryzująca ruch wirowy (obrotowy), jest różna od zera.

Przepływ taki zawiera jednak jakby potencjalną możliwość wykonywania obrotu. Jeżeli np. wstawimy do niego kółko z łopatkami tak, że oś obrotu nie będzie prostopadła do osi Z , to przepływ ten zacznie to kółko obracać.

Między gradientem, rotacją i dywergencją zachodzi szereg związków. Wymienię tylko te dwa spośród nich, które wydają mi się najważniejsze:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0$.

b) Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, żeby pole wektorowe A było potencjalne, jest warunek $\operatorname{rot} A = 0$

Z każdego z nich wynika natychmiast równość, którą umieściłem w tytule

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi)] \equiv 0.$$

Różne całki — podobne własności

Rozważmy zadanie:

Dany jest odcinek $\langle a, b \rangle$ na osi X . Z każdego punktu x tego odcinka wystawiamy prostopadłe w górę odcinek o długości $f(x) \geq 0$. Obliczyć pole S powstającej w ten sposób figury płaskiej (o funkcji $f(x)$ zakładamy, że jest „porządna”, np. ciągła).

Jak wiemy, rozwiązaniem tego zadania jest *całka (pojedyncza)* funkcji f po odcinku $\langle a, b \rangle$ (zob. rys. 1):

$$S = \int_{\langle a, b \rangle} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Co więcej, historycznie rzecz biorąc, całka oznaczona została wprowadzona właśnie po to, by była ona rozwiązaniem naszego zadania. Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) podany jest na rys. 2 (dodajemy pola małych prostokątów). Jak wiemy, można również obliczać całki z funkcji nie tylko dodatnich.

Rozważmy teraz zadanie analogiczne (rys. 3):

Dany jest obszar płaski \mathcal{P} w płaszczyźnie XY . Z każdego punktu (x, y) tego obszaru wystawiamy prostopadłe „w górę” odcinek o długości $f(x, y) \geq 0$. Obliczyć objętość B powstającej w ten sposób bryły (o funkcji $f(x, y)$ i tu zakładamy, że jest „porządna”, np. ciągła).

Rozwiązanie tego zadania nazywa się *całką podwójną* funkcji $f(x, y)$ po obszarze \mathcal{P} :

$$B = \iint_{\mathcal{P}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{P}} f(x, y) d\mathcal{P}.$$

Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) podany jest na rys. 4 (dodajemy objętości małych prostopadłościów). Okazuje się, że można zdefiniować nieco ogólniej całkę podwójną, tak aby miała ona sens dla funkcji nie tylko dodatnich.

W podobny sposób można wprowadzić całkę potrójną. Formułujemy mianowicie zadanie:

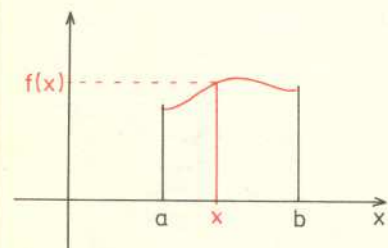
Dany jest w przestrzeni XYZ obszar trójwymiarowy (bryła) \mathcal{V} . Z każdego punktu (x, y, z) wystawiamy „w czwarty wymiar” prostopadłe w kierunku dodatniego zwrotu czwartej osi odcinek o długości $f(x, y, z) \geq 0$ (o funkcji $f(x, y, z)$ zakładamy, że jest np. ciągła). Obliczyć „objętość czterowymiarową” U powstającej w ten sposób bryły czterowymiarowej.

Rozwiązaniem tego zadania jest *całka potrójna* z funkcji $f(x, y, z)$ po bryle \mathcal{V} :

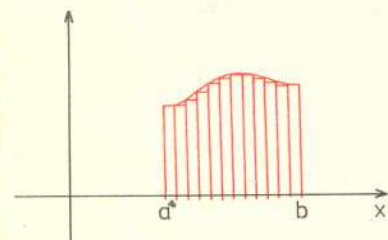
$$U = \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) d\mathcal{V}.$$

Przybliżony sposób obliczania tej całki (o ile ona istnieje) jest analogiczny do poprzednich: dzielimy \mathcal{V} na małe kostki, objętość kostki mnożymy przez wartość funkcji f w lewym-dolnym-przednim rogu kostki (będzie to objętość „prostopadłościu czterowymiarowego”) i wszystkie te iloczyny dodajemy. Trudno sobie wyobrazić sens geometryczny tej całki, ma ona jednak proste ilustracje fizyczne. Np. jeśli \mathcal{V} jest geometrycznie ciałem o niejednorodnej gęstości $f(x, y, z)$, to dla obliczenia masy tego ciała należy obliczyć całkę z gęstości po bryle \mathcal{V} . (Innymi słowy — gęstość „odkładamy” w czwartym wymiarze, nadając obliczaniu masy interpretację geometryczną). Przybliżony sposób obliczania całki odpowiada tu skorzystaniu z faktu, że w bardzo małych obszarach gęstość można uznać za praktycznie stałą.

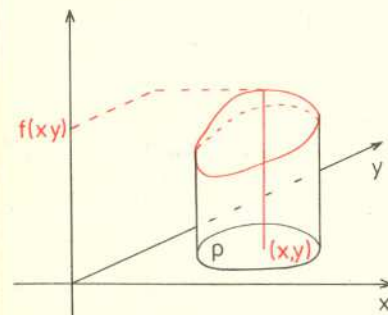
Uznajmy więc, że wiemy już, co to są całki: podwójna i potrójna. Przyjmijmy też, że „definicje” całek: *krzywoliniowej* i *powierzchniowej* podane na marginesie artykułu $\operatorname{div}[\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi)] \equiv 0$ też w wystarczającym stopniu uruchomiły naszą intuicję. Możemy teraz sformułować trzy interesujące twierdzenia.



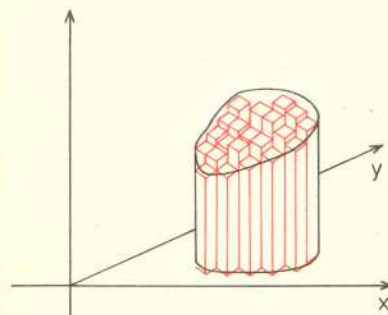
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4