Klasyfikacja powierzchni

Dr Sławomir NOWAK

Bohaterem naszego artykułu jest pewna rodzina *figur dwuwymiarowych*. Przykładami figur dwuwymiarowych są: domknięta tarcza koła, parasol (patrz rysunek), książka z trzema kartkami (rysunek), sfera (powierzchnia kuli trójwymiarowej) i torus (tj. podzbiór przestrzeni trójwymiarowej otrzymany w wyniku obrotu okręgu dokoła prostej nie przecinającej go i położonej w tej samej co i on płaszczyźnie).

Aby skonstruować ich modele, trzeba skleić ze sobą w odpowiedni sposób pewną skończoną ilość mniejszych trójkątnych kawałków kartonu i pewną ilość patyczków (parasol).

Znacznie trudniej niż bohaterów jest opisać miejsce akcji naszego artykułu. Będzie nim *Przestrzeń* (przez duże P). Trzeba będzie sobie wyobrazić, że jest w niej znacznie więcej miejsca niż w naszej zwykłej przestrzeni trójwymiarowej. Jeśli np. umieścimy w niej sferę dwuwymiarową, to znajdziemy tam prostą przechodzącą przez jej środek i nie mającą z nią żadnych punktów wspólnych. Jest to oczywiście niemożliwe w przestrzeni trójwymiarowej. W podobnym sensie w przestrzeni trójwymiarowej jest znacznie więcej miejsca niż na płaszczyźnie, na przykład w przestrzeni trójwymiarowej można znaleźć (analogicznie jak poprzednio) prostą przechodzącą przez środek okręgu i nie mającą z nim punktów wspólnych, co na płaszczyźnie nie jest możliwe. Ze względu na to wszystko akcję naszego artykułu trzeba będzie umieścić w przestrzeni czterowymiarowej.

Podkreślamy, że do zrozumienia artykułu nie jest konieczna dokładna znajomość tego, czym jest Przestrzeń, lecz trzeba będzie przez cały czas pamiętać, że można w niej robić pewne rzeczy niewykonalne w zwykłej przestrzeni trójwymiarowej.

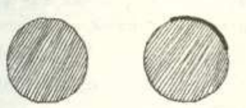
Artykuł ten będzie więc mówił o pewnych własnościach pewnej klasy figur dwuwymiarowych położonych w Przestrzeni. Tymi własnościami będą *niezmienniki homeomorfizmów* (własności topologiczne).

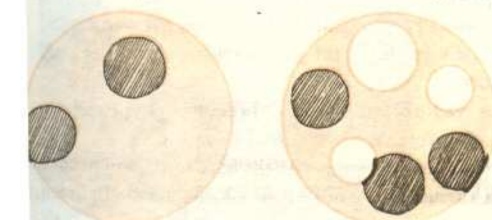
Homeomorfizmem nazywamy wzajemnie jednoznaczne przekształcenie f figury P na figurę Q takie, że zarówno f jak i f^{-1} są ciągłe. Mówimy wtedy, że figury P i Q są homeomorficzne (topologicznie równe lub równoważne). Rozciągając zrobiony z gumy model dowolnej figury otrzymuje się stale modele figur homeomorficznych. Homeomorfizmami są także przekształcenia sprowadzające się do rozcinania modelu wzdłuż różnych krzywych i następnie po dokonaniu różnych „przekręceń" i ruchów, zszycia rozcięcia w dokładnie taki sam sposób, jak na początku.

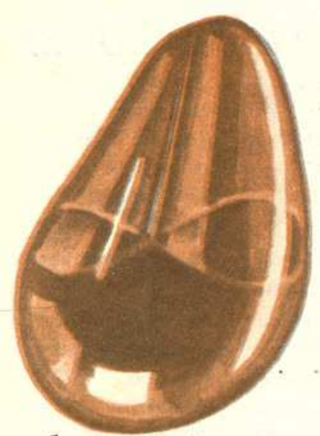
Umówmy się jeszcze, że *dyskiem otwartym* (*domkniętym*) będziemy nazywali każdą figurę homeomorficzną z otwartą (domkniętą) tarczą koła.

Spośród omówionych wyżej przykładów różnych figur dwuwymiarowych na szczególną uwagę zasługują torus i sfera dwuwymiarowa. Ich topologiczna budowa w pobliżu każdego punktu jest taka sama, jak budowa płaszczyzny. Każdy punkt należący do sfery lub do torusa można przykryć dyskiem otwartym położonym całkowicie na figurze i to tak dobrze, i dokładnie, że wszystkie punkty położone dostatecznie blisko niego są także przykryte. Mówiąc precyzyjnie, dla każdego punktu istnieje takie jego otoczenie, które jest otwartym dyskiem. Można teraz, zapominając o naszych dwóch konkretnych przykładach, skoncentrować uwagę tylko na własności sformułowanej w ostatnim zdaniu i zacząć badać figury dwuwymiarowe położone w Przestrzeni posiadające tę właśnie własność. Rozsądne będzie tutaj ograniczenie się do podzbiorów Przestrzeni spełniających dodatkowo jeszcze pewien naturalny warunek gwarantujący to, że figura składa się z dokładnie jednego kawałka. Nazywa się on spójnością i mówi że każde dwa punkty zbioru dają połączyć się w nim drogą czyli czymś, co jest topologicznie równoważne odcinkowi domkniętemu.

Figury dwuwymiarowe spełniające te wszystkie warunki (posiadanie dla każdego punktu otoczenia będącego otwartym dyskiem i spójność) nazywamy *powierzchniami zamkniętymi*. Okazuje się, że z punktu widzenia samej teorii powierzchni zamkniętych bardzo celowe jest badanie nieco szerszej klasy zbiorów. Chodzi o tzw. *powierzchnie z brzegiem* tj. domknięte i spójne podzbiory Przestrzeni mające tę własność, że każdy punkt ma otoczenie otwarte topologicznie równoważne z dyskiem otwartym lub podzbiorem pełnego kwadratu składającym się z wnętrza tego kwadratu i otwartego odcinka położonego na jednym z boków. Powierzchniami z brzegiem są np. domknięta tarcza koła i domknięta tarcza koła, w której wycięto skończoną ilość okrągłych dziur. Innym przykładem powierzchni z brzegiem jest wstęga Möbiusa, którą otrzymuje się z prostokątnego paska papieru przekręcając go o 180° i sklejając tak, jak na rysunku, jego krótsze krawędzie.





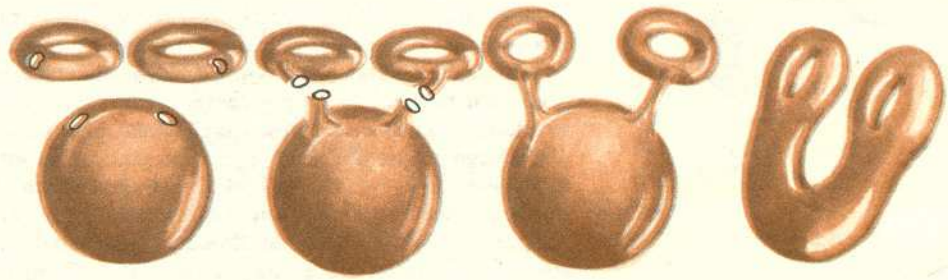


płaszczyzna rzutowa

Brzegiem powierzchni z brzegiem nazywamy zbiór tych wszystkich jej punktów, które nie mają otoczeń homeomorficznych z otwartym dyskiem.
Czytelnik z łatwością sprawdzi, że brzegiem zarówno domkniętej tarczy koła, jak i wstęgi Möbiusa jest okrąg (dokładniej zbiór równoważny okręgowi), a brzegiem sfery z wyciętymi k otworami jest suma $k+1$ rozłącznych okręgów. Można też nawet pokazać, że brzeg dowolnej powierzchni z brzegiem składa się ze skończonej liczby rozłącznych i spójnych „kawałków", które są z topologicznego punktu widzenia okręgami.
Jeśli w dalszym ciągu w tekście będzie występowało słowo „powierzchnia" i nie będzie zaznaczone czy mamy na myśli powierzchnię zamkniętą, czy też powierzchnię z brzegiem, to będzie chodziło zarówno o powierzchnie z brzegiem jak i zamknięte.
Wiadomo, że zszywając w odpowiedni sposób ze sobą jednolite (bez dziur) kawałki skóry otrzymuje się piłkę futbolową. Piłka taka jest dobrym modelem sfery. W Przestrzeni w podobny sposób można otrzymać model dowolnej powierzchni zszywając skończoną liczbę jednolitych kawałków elastycznego materiału i to w taki sposób, że dwa różne kawałki są zszywane wzdłuż tylko jednego odcinka. Rozważmy teraz powierzchnię z brzegiem N wraz z wyróżnionymi k okręgami $O_1, O_2, \ldots, O_k$ wchodzącymi w skład brzegu (nie muszą to być wszystkie okręgi wchodzące w skład brzegu).
Przypuśćmy także, że mamy dane k powierzchni z brzegiem $P_1, \ldots, P_k$ oraz, że dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ okrąg S_i wchodzi w skład brzegu powierzchni P_i. Spróbujmy teraz wyobrazić sobie doświadczenie polegające na tym, że zrobione z elastycznego tworzywa modele wszystkich naszych powierzchni sklejamy (czy też zszywamy) w ten sposób, że S_1 zostaje sklejone z O_1, S_2 z O_2, ..., S_k z O_k. W wyniku jego powinniśmy otrzymać model nowej powierzchni z brzegiem M.

W trakcie wykonywanego wyżej doświadczenia należy pamiętać, że wszystko dzieje się w Przestrzeni. W zwykłej trójwymiarowej przestrzeni nie da się skleić wzdłuż odpowiednich okręgów stanowiących brzegi wstęgi Möbiusa i sfery z wyciętym jednym okrągłym otworem. Można jednak sprawdzić, że udaje się to zrobić w Przestrzeni. (Podobnie dzieje się w przypadku, gdy staramy się skleić brzegi dwóch dysków leżących na płaszczyźnie. Ta ostatnia operacja daje się już wykonać w przestrzeni trójwymiarowej i, jak łatwo sprawdzić, w jej wyniku dostajemy sferę).
Sklejając powierzchnie z brzegiem można otrzymać dużo przykładów powierzchni zamkniętych, mających różne ciekawe własności.

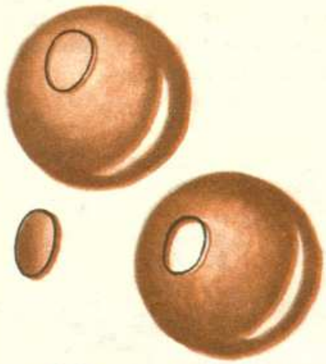
Pierwszym z nich będzie sfera z p uchami. Otrzymujemy ją wycinając w sferze p okrągłych otworów i zaklejając je następnie wszystkie p torusami z wyciętym jednym otworem.



butelka Kleina

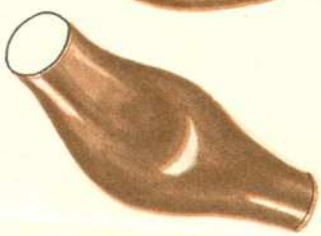
Nic także nie stoi na przeszkodzie temu, żeby mając daną sferę z wyciętymi $p = p_1 + p_2$ okrągłymi otworami część z nich (to jest np. p_1) zakleić tak jak poprzednio torusem z jednym wyciętym otworem a część (np. p_2) wstęgami Möbiusa (których brzegi są także okręgami).
W szczególnym przypadku, gdy w sferze wycięto tylko jeden lub dwa otwory i zaklejono je wstęgami Möbiusa, otrzymuje się powierzchnie, które nazywa się odpowiednio płaszczyzną rzutową i butelką Kleina.

Bardzo ciekawe są te wszystkie powierzchnie, które zawierają wstęgę Möbiusa.
Jeśli po powierzchni sklejonej z papieru wstęgi Möbiusa spaceruje mucha, która posuwając się naprzód stara się jednocześnie być w jednakowej odległości od krawędzi paska, to powróci ona do pierwotnego położenia głową w dół i znajdzie się z drugiej strony kartki.
Jeśli na umieszczonym w Przestrzeni modelu powierzchni istnieje droga z jednej strony modelu na drugą, to powierzchnię tę nazywamy jednostronną.
Dzieje się tak np. w przypadku, gdy powierzchnia zawiera wstęgę Möbiusa. Można też pokazać, że każda powierzchnia jednostronna zawiera wstęgę Möbiusa.
Aby uzmysłowić sobie, dlaczego tak jest, wystarczy zauważyć, że jeśli istnieje droga prowadząca z jednej strony powierzchni na drugą, to istnieje taka droga, że jej tor jest okręgiem. Dostatecznie cienki pasek ją otaczający jest właśnie wstęgą Möbiusa.
Spróbujmy teraz rozciąć nasz model wstęgi Möbiusa wzdłuż linii środkowej (będziemy ją dalej nazywać równikiem), po której spacerowała mucha. Okazuje się, że otrzymamy coś, co topologicznie jest równoważne ze sferą, z której wycięto dwa otwory. Innym bardzo dziwnym zjawiskiem jest to, że równik nie rozpadł się na dwa rozłączne kawałki (tak jak można się było spodziewać), lecz jest jednym okręgiem.



Oznacza to, że mając w Przestrzeni model dowolnej jednostronnej powierzchni z brzegiem i rozcinając go wzdłuż równika wstęgi Möbiusa otrzymujemy powierzchnię z brzegiem składającym się z dokładnie o jeden większej liczby okręgów niż brzeg powierzchni wyjściowej.
Warto także zauważyć, że jeśli do brzegu utworzonej dziury przyszyjemy brzeg modelu wstęgi Möbiusa, to otrzymamy powierzchnię topologicznie równoważną wyjściowej.

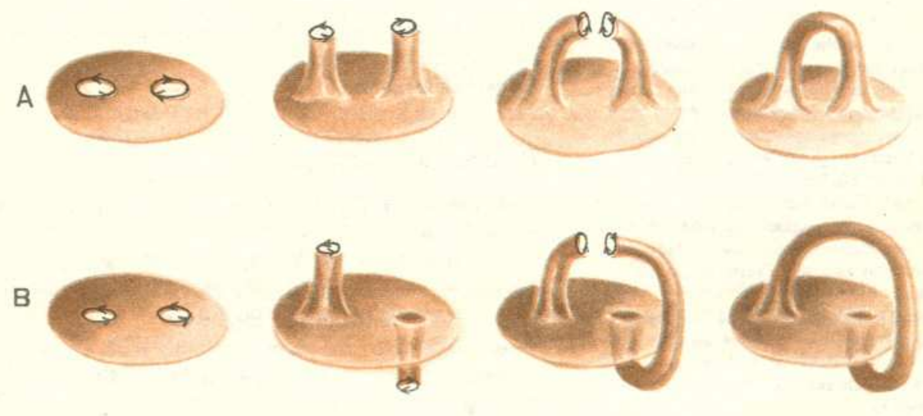
Zupełnie inna jest sytuacja w przypadku, gdy dokonujemy rozcięć na sferze i torusie. Rozcinając je tak, jak na rysunku, można się przekonać, że w przypadku sfery otrzymuje się dwie rozłączne powierzchnie z brzegiem, a w przypadku torusa jedną, ale za to taką, że jej brzeg składa się z dwu okręgów. Można pokazać, że własność istnienia dla powierzchni takiej krzywej zamkniętej, że po dokonaniu rozcięcia wzdłuż tej krzywej otrzymamy jedną powierzchnię z brzegiem, który składa się z dokładnie o jeden większej liczby okręgów niż brzeg powierzchni wyjściowej, jest równoważna temu, że powierzchnia jest jednostronna. Okrąg ten odpowiada wtedy równikowi wstęgi Möbiusa.



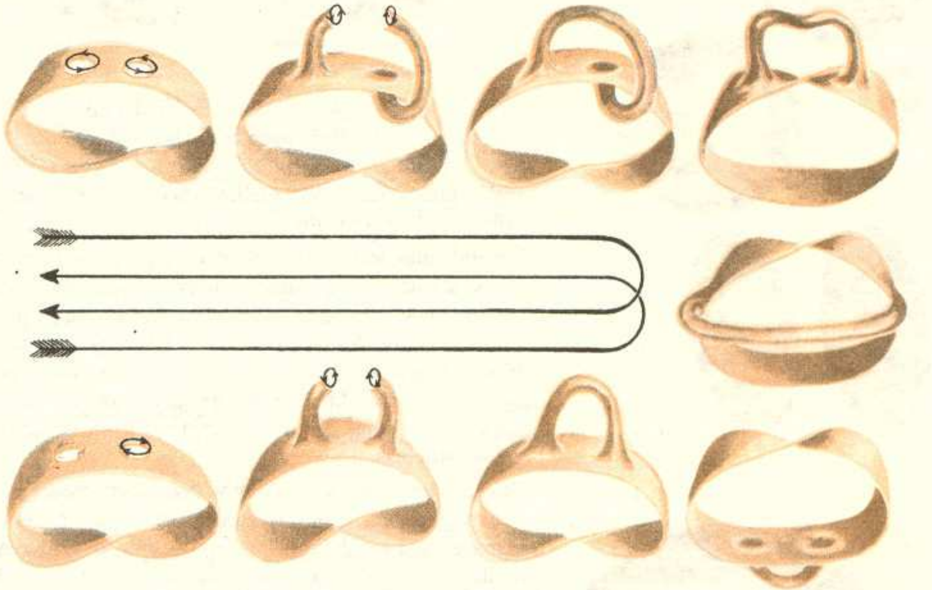
Załóżmy teraz, że mamy dany w Przestrzeni model pewnej powierzchni zamkniętej otrzymany w wyniku zszycia w odpowiedni sposób jednolitych kawałków tkaniny (tak, jak to było wcześniej zaznaczone) i spróbujmy wyobrazić sobie doświadczenie polegające na rozcinaniu go kolejno wzdłuż rozłącznych okręgów utworzonych przez części szwów. Rozcinamy (a właściwie rozpruwamy) naszą powierzchnię tak długo, dokąd pozostaje spójna. Chodzi o to, że w pierwszym kroku szukamy okręgu O_1 o tej własności, że powierzchnia nasza po wykonaniu cięcia wzdłuż niego pozostaje spójna. Jeśli dokonano już k rozcięć wzdłuż rozłącznych okręgów $O_1, \ldots, O_k$ i powierzchnia nadal jest spójna, to badamy wszystkie rozłączne z nimi okręgi utworzone przez części szwów i szukamy wśród nich takiego O_{k+1}, że nasz model pozostaje spójny po wykonaniu cięcia wzdłuż niego. Nasze doświadczenie kończy się po k krokach — w momencie, kiedy nie będziemy mogli już znaleźć takiego O_{k+1}.

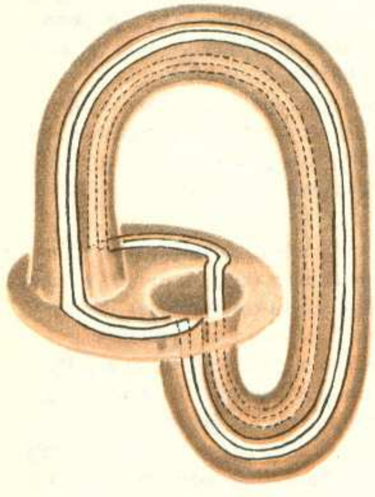
Oznacza to, że w jego wyniku otrzymujemy model powierzchni z brzegiem, która rozpada się na kawałki po rozcięciu wzdłuż dowolnego okręgu (utworzonego przez części szwów). Warto się w tej chwili zastanowić nad tym, czym może być z topologicznego punktu widzenia taka właśnie powierzchnia z brzegiem.
Nie jest wcale trywialnym faktem (choć intuicyjnie dość oczywistym) to, że jeśli brzeg takiej powierzchni składa się dokładnie z jednego okręgu, to musi ona być domkniętym dyskiem. Jeśli okręgów jest k i $k > 1$, to można model naszej powierzchni rozciąć wzdłuż drogi łączącej dwa różne okręgi wchodzące w skład brzegu i zmniejszyć ich liczbę, a następnie korzystając z indukcji matematycznej pokazać, że jest to sfera z wyciętymi k okrągłymi otworami.
Wracając więc do wykonywanego doświadczenia: po wykonaniu p rozcięć model powierzchni zamkniętej zamienił się na model sfery z pewną ilością dziur.
W trakcie rozcinania powierzchni wzdłuż okręgu mogą zajść dwa wzajemnie wykluczające się przypadki. Albo okrąg, wzdłuż którego cięcie było wykonywane, rozpadnie się na dwa różne okręgi albo stanie się tak, jak przy rozcinaniu wstęgi Möbiusa wzdłuż równika — zamieni się na jeden większy okrąg.

Z tego wszystkiego, co zostało już napisane wcześniej, wynika, że w ostatnim przypadku nasza powierzchnia musi zawierać wstęgę Möbiusa. Jej równik stanowi okrąg, wzdłuż którego powierzchnię naszą rozcinaliśmy. Jeśli okrąg rozpadł się na dwa różne okręgi, to trzeba rozróżnić dwa przypadki przedstawione na rysunku.



Z rysunku poniżej widać, że na każdej takiej powierzchni, na której istnieje taki okrąg, że ślad cięcia wzdłuż niego składa się z jednego kawałka (powierzchnia zawiera wtedy wstęgę Möbiusa) istnienie rozcięcia przedstawionego na rysunku A jest równoważne istnieniu rozcięcia przedstawionego na rysunku B i jedno z nich można zawsze zamienić na drugie.





Spróbujmy się zastanowić, co wynika z istnienia rozcięcia takiego jak na rysunku B. Zszywając powierzchnię wzdłuż niego otrzymujemy ucho „przekręcone". Rozcinając z kolei ucho „przekręcone" w taki sposób, jak na rysunku, zauważymy, że rozcięcia takie można zamienić na dwa rozcięcia odpowiadające wstęgom Möbiusa.
Wynika stąd już *twierdzenie o klasyfikacji powierzchni.*
TWIERDZENIE O KLASYFIKACJI. *Dla każdej powierzchni zamkniętej istnieje takie p, że jest ona homeomorficzna ze sferą z p uchami lub też ze sferą z wyciętymi p otworami, które zaklejono wstęgami Möbiusa.*
Ćwiczenie. Znaleźć podobne twierdzenie dla powierzchni z brzegiem.

Uwaga filateliści
Mamy także coś dla Was. Oto znaczek wydany w marcu 1976 roku z okazji dwudziestej rocznicy powstania Zjednoczonego Instytutu Badań Jądrowych w Dubnej.
Porozumienie o utworzeniu Instytutu zostało zawarte 26.III.1956 r. w Moskwie. W owym instytucie współpracują fizycy z ZSRR, CSRS, Polski i wielu innych krajów. Instytut dysponuje unikalnymi urządzeniami z zakresu fizyki jądrowej i wysokich energii umożliwiającymi wykonanie eksperymentów zbyt kosztownych dla jednego kraju.
Dokładniej pisaliśmy o Zjednoczonym Instytucie Badań Jądrowych w numerach siódmym i ósmym „Delty" z 1974 r. A może sami znajdziecie ciekawe znaczki, których temat byłby związany z matematyką lub fizyką?
Częściej jednak można spotkać na znaczku portret królowej aniżeli Einsteina (dla zapalonych filatelistów informacja — w 1959 r. Polska wydała znaczek właśnie z portretem Einsteina).

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 100. Znaleźć wszystkie funkcje $f: R \to R$ spełniające dla wszelkich liczb rzeczywistych x, y równość

$$[f(x+y)]^2 = [f(x)]^2 + [f(y)]^2.$$

Rozwiązanie na str. 13.

M 101. Udowodnić, że jeśli P jest dowolnym punktem leżącym w płaszczyźnie równoległoboku $ABCD$, to

$$AP < BP + CP + DP$$

Rozwiązanie na str. 10.

M 102. Udowodnić, że każda liczba naturalna większa od 10 jest sumą dwóch różnych liczb pierwszych i liczby złożonej.
Rozwiązanie na str. 7.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 34. Temperatury trzech identycznych ciał A, B i C o stałej pojemności cieplnej wynoszą odpowiednio:
$T_A = 300$ K, $T_B = 300$ K, i $T_C = 100$ K. Zakładając, że żadna energia nie jest dostarczana z zewnątrz, określcie do jakiej maksymalnej temperatury można podgrzać dowolne z tych ciał przez zastosowanie silników cieplnych.
Wskazówka: patrz rozwiązanie zadania **F 31**, Delta 7/1976 oraz S. Szczeniowski „Fizyka doświadczalna" t. 2, PWN 1964, rozdział 44
Rozwiązanie na str. 10.