# Prawdopodobieństwo?

Dr Tadeusz B. IWIŃSKI

Mechanika kwantowa wprawiała i ciągle jeszcze wprawia matematyków w zakłopotanie, dostarczając tym samym wielu interesujących problemów. Zaczęło się od Diraca, który różniczkował funkcje nieróżniczkowalne i otrzymywał sensowne wyniki. Potrzeba było lat, by rzecz uporządkować: stworzono (zob. Delta 10/1975) teorię dystrybucji, na gruncie której poczynania Diraca nabrały głębokiego matematycznego sensu.

Heisenberg swą niewinnie wyglądającą zasadą nieoznaczoności dostarczył zajęcia logikom: koniunkcja dwóch zdań, z których każde jest prawdziwe lub fałszywe może tu nie być (zob. Delta 4/1975) ani prawdziwa, ani fałszywa. Do dziś trwają poszukiwania „logiki kwantowej". I choć sformułowano tu wiele interesujących propozycji — żadna z nich nie zdobyła sobie jeszcze pełnych praw obywatelskich.

Nie koniec na tym. Born wprowadza do mechaniki kwantowej probabilistyczną interpretację występujących w niej obiektów (np. funkcji falowej, zob. artykuł J. Kijowskiego w tym numerze). Interpretacja ta rozwiązuje fizykom pewne kłopoty pojęciowe, ale rodzi nowe kłopoty matematyczne.

Pierwszy oczywisty problem wynika z zasady nieoznaczoności. Jak wiemy — w zwykłym rachunku prawdopodobieństwa koniunkcja dwu zdarzeń jest zdarzeniem. Koniunkcja dwu „zdarzeń kwantowych" wcale „zdarzeniem kwantowym" być nie musi.

Rozpatrzmy rzecz nieco dokładniej. Wyobraźmy sobie dla uproszczenia pojedynczą cząstkę poruszającą się po prostej, oznaczmy jej położenie przez $q$, a pęd przez $p$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zdanie $A$: „w chwili $t$ cząstka znajduje się w przedziale $\langle \alpha, \alpha+\varepsilon \rangle$" określa pewne „zdarzenie kwantowe", bowiem teoretycznie możliwy jest pomiar położenia z dowolną dokładnością. Również dla dowolnego $\eta > 0$ zdanie $B$: „w chwili $t$ pęd cząstki zawarty jest w przedziale $\langle \beta, \beta+\eta \rangle$" też opisuje pewne zdarzenie kwantowe, bo i pęd można mierzyć dowolnie dokładnie. Mimo to, jeśli tylko $\varepsilon$ i $\eta$ są dostatecznie małe to formalnie napisana koniunkcja $A \cap B$ zdarzeń $A$ i $B$ „zdarzeniem kwantowym" nie jest. Koniunkcja ta ma bowiem sens wtedy i tylko wtedy gdy

$$\varepsilon\eta \geqslant \hbar/2.$$

Okazuje się jednak, że kłopot matematyczny jest tu mniejszy, niż się na pierwszy rzut oka wydaje: można tak zmodyfikować elementarny rachunek prawdopodobieństwa, że zasada nieoznaczoności nie jest sprzeczna z nowym „kwantowym rachunkiem prawdopodobieństwa". Przy tym ten nowy rachunek jest wystarczająco podobny do starego na to, aby nie razić ekstrawagancją.

W zwykłym rachunku prawdopodobieństwa, przypomnijmy, rodzina zdarzeń scharakteryzowana jest następująco:

Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega$ oraz pewna rodzina $Z$ podzbiorów zbioru $\Omega$ zwanych zdarzeniami. Przy tym zakłada się, że

1) $\emptyset$ i $\Omega$ są zdarzeniami;
2) jeśli $A$ jest zdarzeniem, to $A' = \Omega - A$ też jest zdarzeniem;
3) jeśli $A$, $B$ są zdarzeniami, to również $A \cup B$ jest zdarzeniem.

Prawdopodobieństwo natomiast jest taką funkcją $P: Z \to \langle 0, 1 \rangle$, że

4) $P(\Omega) = 1$;
5) jeśli $A$ i $B$ są zdarzeniami i $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Kwantowy rachunek prawdopodobieństwa wygląda podobnie. Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych $\Omega$, oraz pewna rodzina $Z_k$ podzbiorów $\Omega$ zwanych zdarzeniami kwantowymi (krótko: k-zdarzeniami). Przy tym żąda się, aby spełnione były następujące warunki:

1) $\emptyset$ i $\Omega$ są k-zdarzeniami;
2) jeżeli $A$ jest k-zdarzeniem, to $A'$ też jest k-zdarzeniem;
3') jeśli $A$, $B$ są k-zdarzeniami i $A \cap B = \emptyset$, to $A \cup B$ też jest k-zdarzeniem.

Prawdopodobieństwo natomiast jest taką funkcją $P$: $Z_k \to \langle 0, 1 \rangle$, że

4) $P(\Omega) = 1$;
5) jeśli $A$ i $B$ są k-zdarzeniami i $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Różnica jest więc bardzo niewielka. Sprowadza się ona jedynie do zastąpienia warunku 3) warunkiem 3'), który na gruncie mechaniki kwantowej jest całkiem do przyjęcia. O ile bowiem z warunków 1), 2), 3) wynika, że jeśli $A$ i $B$ są zdarzeniami, to również $A \cap B$ jest zdarzeniem, to z warunków 1), 2), 3'), wynika jedynie, że jeśli $A$, $B$ są k-zdarzeniami, to $A \cap B$ jest k-zdarzeniem *wtedy* i *tylko wtedy, gdy $A \cup B$ jest k-zdarzeniem*. Warunek 3') zakazuje więc co prawda rozpatrywać alternatywy takich k-zdarzeń, których koniunkcja nie jest k-zdarzeniem, ale, jak się okazuje, w tych problemach mechaniki kwantowej, w których obowiązuje zasada nieoznaczoności nie powstaje nigdy potrzeba rozważania takich alternatyw. Prawdopodobieństwo kwantowe ma natomiast dokładnie te same własności rachunkowe, co prawdopodobieństwo zwykłe i operowanie nim, jeśli się dobrze określi rodzinę zdarzeń kwantowych, nie nastręcza żadnych trudności (zob. zadanie na końcu artykułu).

Gdzie więc — i czy rzeczywiście — powstają zapowiedziane istotne kłopoty z probabilistyczną interpretacją mechaniki kwantowej?

Tu dygresja. „Funkcja $\delta$" Diraca — póki nie skonstruowano dystrybucji — w świadomości jej użytkowników była funkcją, „ale nie zawsze". Można było np. powiedzieć, że dla $x \neq 0$ jest ona funkcją równą tożsamościowo zeru; nie miało sensu natomiast stwierdzenie, że dla $x = 0$ przyjmuje ona jakąkolwiek wartość. W gruncie rzeczy to, czy była, czy nie była funkcją zależało od fizycznej interpretacji kontekstu, w którym występowała.

Wartość matematyki jako narzędzia używanego przez przyrodników polega zaś właśnie na tym, że pojęcia matematyczne mają jednoznaczny sens, który jest niezależny od przyrodniczej interpretacji tych pojęć. Obiekt badany przez matematykę albo jest funkcją — albo nią nie jest. Trzeciej możliwości nie ma.

Matematycy musieli więc uznać, że $\delta$ funkcją nie jest i że mechanika kwantowa posługuje się pewną klasą obiektów ogólniejszą niż klasa funkcji. I dlatego stworzyli teorię dystrybucji: teorię ogólniejszą niż teoria funkcji.

Z prawdopodobieństwem jest podobnie. Jest to pojęcie matematyczne o jednoznacznie określonych własnościach. Jeśli więc coś w mechanice kwantowej jest podobne do prawdopodobieństwa, „ale nie zawsze" — to nie jest to już prawdopodobieństwo. Dlatego właśnie wykonaliśmy krok polegający na wprowadzeniu prawdopodobieństwa kwantowego. Okazuje się jednak, że jest to krok zbyt mały.

Poważne kłopoty pojawiają się bowiem dopiero wtedy, gdy wychodzi się poza elementarny rachunek prawdopodobieństwa i zaczyna rozważać zmienne losowe.

Przypomnijmy: Zmienną losową nazywa się taka funkcja $X: \Omega \to \mathbf{R}$, że dla każdego przedziału $\langle a, b\rangle \subset \mathbf{R}$ zbiór $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \langle a, b\rangle\}$ jest zdarzeniem.

Zmienną losową nazywa się ciągłą, jeśli istnieje taka funkcja $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, która jest nieujemna

i dla każdego przedziału $\langle a, b\rangle$ $\quad P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in \langle a, b\rangle\}) = \int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Funkcję $f$ nazywa się gęstością rozkładu zmiennej $X$.

Jeśli więc (wracamy do przykładu pojedynczej cząstki) $\psi(q)$ jest funkcją falową, a — zgodnie z przyjętą interpretacją — $f(q) = |\psi(q)|^2$ jest gęstością rozkładu położenia cząstki na prostej, to $\int_a^b |\psi(q)|^2 \mathrm{d}q$ jest prawdopodobieństwem tego, że cząstka znajduje się w przedziale $\langle a, b\rangle$.

Interpretacja ta oznacza, że położenie $q$ traktowane jest jako zmienna losowa. Analogicznie — pęd $p$ jest teraz drugą zmienną losową, o gęstości $g(p) = |\Phi(p)|^2$. Przy tym funkcja $\Phi$ jest jednoznacznie wyznaczona przez funkcję $\psi$. Tak więc cząstka opisywana jest parą ciągłych zmiennych losowych $(q, p)$ o znanych rozkładach $|\psi(q)|^2$ i $|\Phi(p)|^2$.

$$\Phi(p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(q) e^{-\frac{i}{\hbar}pq}\,\mathrm{d}q$$

W rachunku prawdopodobieństwa parę zmiennych losowych $(X, Y)$ nazywa się zmienną dwuwymiarową. Gęstością rozkładu dwuwymiarowej zmiennej losowej $(X, Y)$ nazywa się taką nieujemną funkcję $h(x, y)$, że dla dowolnych liczb $a < b$ i $c < d$ zachodzi równość

$$P(\{\omega \in \Omega: \quad (X(\omega) \in \langle a, b\rangle) \quad \text{i} \quad (Y(\omega) \in \langle c, d\rangle)\}) = \int_a^b\int_c^d h(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Dowodzi się przy tym, że $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)\mathrm{d}y$ jest gęstością rozkładu zmiennej $X$, a $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)\,\mathrm{d}x$ jest gęstością rozkładu zmiennej $Y$.

Okazuje się, że gdyby zamiast prawdopodobieństwa wykorzystać do definicji zmiennej losowej prawdopodobieństwo kwantowe, to definicja ta pozostałaby poprawna. Nasuwa się więc przypuszczenie, że jeśli zacznie się używać kwantowych zmiennych losowych, to wszystkie ich własności formalne będą zgodne z twierdzeniami mechaniki kwantowej.

(Byłoby tak, gdyby wszystkie kłopoty z interpretacją prawdopodobieństwa wynikały z zasady nieoznaczoności. Niestety — tak nie jest).

Wróćmy do przykładu. Mamy do czynienia z parą zmiennych losowych $(q, p)$ o znanych gęstościach rozkładu. Powstaje naturalne pytanie: Czy istnieje gęstość rozkładu zmiennej dwuwymiarowej $(q, p)$, tzn. funkcja nieujemna $h(q, p)$ taka, że

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(q, p)\mathrm{d}p = |\psi(q)|^2$ i $\int_{-\infty}^{+\infty} h(q, p)\mathrm{d}q = |\Phi(p)|^2$;

(2) Spełniony jest podany wyżej związek między $\Phi$ i $\psi$ oraz zasada nieoznaczoności;

(3) Wartości średnie obserwowalnych kwantowych zmiennych losowych obliczane zgodnie z definicją wartości średniej w rachunku prawdopodobieństwa są równe wartościom średnim tych zmiennych obliczanym w formalizmie operatorowym mechaniki kwantowej.

Odpowiedzi na to pytanie udzielił L. Cohen. Jest ona następująca:

Istnieją co prawda funkcje spełniające (1) i (2), ale nie istnieje funkcja spełniająca (1), (2) i (3). A więc nie można posuwać się zbyt daleko w probabilistycznych interpretacjach mechaniki kwantowej. Co prawda można traktować zarówno $p$ jak i $q$ jako zmienne losowe, ale rozpatrując $p$ i $q$ łącznie — wychodzimy już z rachunku prawdopodobieństwa, para $(q, p)$ *zmienną losową nie jest.*

Rozwiązanie zadania M 99. Należy udowodnić, że różnica

$$R = (a^2 + 2na)^k - a^2,$$

gdzie $n$ jest liczbą całkowitą nieujemną, $k$ — liczbą naturalną, jest wielokrotnością liczby $2a$.

Mamy $R = a^{2k} + \binom{k}{1} a^{2(k-1)}2na + \ldots + \binom{k}{k-1} a^2(2na)^{k-1} + (2na)^k - a^2$.

Wszystkie składniki tej sumy prócz, być może, pierwszego i ostatniego są podzielne przez $2a$. Ponadto mamy

$$a^{2k} - a^2 = a^2(a^{2(k-1)} - 1) = a \cdot a \cdot (a-1) \cdot A_k = 2a\frac{a(a-1)}{2}A_k,$$

gdzie $A_k$ jest liczbą całkowitą:

$$A_k = \frac{a^{2(k-1)} - 1}{a-1}$$

oraz $\frac{a(a-1)}{2}$ jest też liczbą całkowitą, gdyż liczba $a(a-1)$ jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysta. $R$ jest więc sumą liczb podzielnych przez $2a$, a więc jest liczbą podzielną przez $2a$.

Rozwiązanie zadania M 98. Najpierw udowodnimy, że istnieje miasto, z którego wychodzi jedna tylko droga. Wyjeżdżamy z dowolnego miasta dowolną drogą. Dojechawszy do jakiegoś miasta jedziemy dalej (jeśli to możliwe) drogą, którą jeszcze nie jechaliśmy. Jeżeli drogi takiej nie ma, to oznacza to, że z miasta tego wychodzi tylko ta droga, którą przyjechaliśmy. Zauważmy, że podróżując w opisany sposób odwiedzimy każde miasto najwyżej raz, w przeciwnym bowiem wypadku istniałaby droga zamknięta („pętla"), co przeczy warunkowi 2°.

Zastosujmy teraz rozumowanie indukcyjne. Dla $n = 2$ twierdzenie jest prawdziwe, mamy bowiem wówczas jeden tylko odcinek drogi. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby $n$. Wówczas, gdy mamy $n+1$ miast, na podstawie udowodnionego wyżej faktu istnieje miasto, z którego wychodzi tylko jedna droga. Odrzućmy to miasto i wychodzącą zeń drogę. Pozostaje nam sieć dróg łącząca $n$ miast i spełniająca warunki zadania, a więc złożona z $n-1$ odcinków. Sieć dróg łącząca $n+1$ miast składa się więc z $n$ odcinków, a więc na podstawie zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe.

I dlatego nie obejdzie się tu bez nowej teorii: teorii ogólniejszej niż rachunek prawdopodobieństwa. Takiej teorii jeszcze nie ma.

**Zadania.** 1. Udowodnić, że jeśli $Z$ jest zwykłą rodziną zdarzeń, $P$ — zwykłym prawdopodobieństwem oraz $A \in Z$ ustalonym zdarzeniem takim, że $P(A) > 0$, to rodzina

$$\{B \in Z: \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\}$$

(tzn. rodzina zdarzeń niezależnych od $A$) jest kwantową rodziną zdarzeń.

2. Pokazać, że jeśli $A$, $B$ są k-zdarzeniami oraz $A \subset B$, to $B - A$ jest k-zdarzeniem.

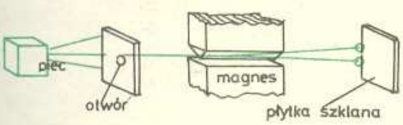
**Literatura**

Tom 33 (z roku 1966) czasopisma „*Philosophy of Science*", artykuły P. Suppesa (str. 14) i L. Cohena (str. 317).

# Cudowny wynik pewnego doświadczenia

Wszystko to brzmi nieprawdopodobnie — powiecie po przeczytaniu dwóch poprzednich artykułów o mechanice kwantowej. Jak to, najbardziej fundamentalna teoria mikroświata pozwalająca przewidzieć wyniki doświadczeń z fantastyczną dokładnością nie może sobie poradzić z opisaniem losów zwykłego, swobodnego elektronu! Czy naprawdę musimy budować teorię, w której z elektronem, a raczej z informacją o nim, jeżeli nań nie patrzymy, wiążemy pewną falę (falę prawdopodobieństwa), podczas gdy w trakcie każdej obserwacji ukazuje się on nam w postaci mikroskopowej cząstki. Na tego typu wątpliwości najlepiej odpowiada zawsze doświadczenie. Opiszemy tu wyniki jednego z przełomowych dla fizyki doświadczeń, wykonanego w 1922 roku przez Sterna i Gerlacha.

Idea eksperymentu jest prosta. Wiązka atomów srebra powstała przez odparowanie srebra w specjalnym piecu jest skierowana między bieguny magnesu wytwarzającego silnie niejednorodne pole (patrz rysunek).




Na magnes atomowy oprócz siły odchylającej działa też siła dążąca do ustawienia go zgodnie z kierunkiem linii pola zewnętrznego. Siła ta nie zmienia jednak kąta między magnesem i kierunkiem linii sił, a tylko wywołuje precesję dokoła tego kierunku. Jest tak dlatego, że własne pole magnetyczne atomu jest związane z występowaniem własnego momentu pędu i atom stanowi mały giroskop.

Samo urządzenie Sterna-Gerlacha po wywierceniu otworu na ekranie w miejscu, gdzie pada jedna z wiązek, stanowi przyrząd do wytwarzania atomów o określonym zwrocie spinu. Można prześledzić cały aparat pojęciowy mechaniki kwantowej ustawiając szereg takich urządzeń (filtrów), różnie obróconych, jedno za drugim i analizując wyniki wymyślonych tak doświadczeń.

Wyniki doświadczenia Sterna-Gerlacha zostały przewidziane przez tzw. starą teorię kwantów przed jego wykonaniem.

Następnie atomy osadzają się na płytce szklanej. Atomy srebra podobnie, jak wszystkie inne atomy, mają własny moment pędu (spin). Powstaje on ze złożenia momentów pędu jądra atomowego i elektronów. Ponieważ wszystkie składniki atomu są naładowane, więc atom taki zachowuje się jak swego rodzaju pętla z prądem i wytwarza własne pole magnetyczne, o kierunku zgodnym z ustawieniem spinu. W niejednorodnym zewnętrznym polu magnetycznym na taki atomowy magnes działa siła odchylająca w górę lub w dół, zależna od kąta między osią magnesu, a zwrotem zmiany (gradientu) pola zewnętrznego. I tak na magnes skierowany wzdłuż gradientu działa maksymalna siła do góry, na skierowany przeciwnie maksymalna siła w dół, na magnes ustawiony prostopadle do kierunku zmiany pola nie działa żadna siła itd. Ponieważ atomy srebra wyprodukowane w piecu stanowią zbiór chaotyczny, więc związane z nimi magnesy są losowo poustawiane i na ekranie powinniśmy otrzymać ciągłą linię wzdłuż kierunku gradientu pola. Tego wymaga fizyka klasyczna i ukształtowany w codziennym doświadczeniu rozsądek. Tymczasem Stern i Gerlach znaleźli na płytce jedynie dwa izolowane punkty. Atomy srebra utworzyły tylko dwie odrębne wiązki. Powtórzmy jeszcze raz: atomy srebra, których spiny były ustawione zupełnie chaotycznie utworzyły dwie oddzielne wiązki. Zupełnie jakby spiny atomów wiedziały (tylko skąd?), że wolno im się ustawić względem pola magnetycznego w ściśle określonych kierunkach (dwóch dla atomów srebra o spinie 1/2). Wynik doświadczenia nie zależy od tego, jak obrócimy układ magnesów wytwarzających pole. Zawsze dostajemy dwie plamki na linii równoległej do kierunku zmiany pola. I to plamki równie intensywne. Choć wynik ten jest wprost fantastyczny, to jednak tak dzieje się w doświadczeniu. Zacznijmy teraz puszczać atomy po kolei w pewnych odstępach czasu. Pojedyńczy atom nawet o znanym z poprzedniego doświadczenia ustawieniu spinu wybierze raz jedno, raz drugie ustawienie swego spinu względem kierunku zmiany pola. Tu tkwi element losowy i to w sytuacji, gdy o własnym polu magnetycznym atomu wiemy chyba wszystko. Mechanika kwantowa też oferuje nam tu tylko prawdopodobieństwo określonego zwrotu. Natomiast skwantowanie rzutu momentu pędu na każdą wyróżnioną oś jest jednoznacznym przewidywaniem w tej teorii. Pozwala ona też obliczyć z ogromną dokładnością wielkość własnego pola magnetycznego związanego ze spinem, a więc i wielkość odchylenia każdej z dwóch wiązek. Dlatego mówimy, że nie ma żadnych przesłanek doświadczalnych na to, żeby poprawiać mechanikę kwantową.