Esej o dodawaniu

Tadeusz B. IWIŃSKI, matematyk

Każdy z Czytelników umie dodać dwie liczby rzeczywiste. Wynikiem jest również liczba rzeczywista. Stąd, posługując się metodą indukcji, wnioskujemy, że możemy dodać dowolną ich ilość. Przy tym dodawanie liczb rzeczywistych jest łączne i przemienne.

Nikt w to nie wątpi? No to sprawdzimy:

Obliczmy sumę nieskończenie wielu jedynek i minus jedynek dodawanych na przemian:

$$(*)\quad 1-1+1-1+1-1\ldots=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

Jeśli obliczać będziemy kolejno sumy częściowe złożone z dwu, trzech, ... składników:

$$\ldots(((((1-1)+1)-1)+1)-1)+\ldots,$$

to będziemy dostawać na przemian zero i minus jeden, co gorsza — w nieskończoność. Taki system dodawania nie prowadzi do niczego sensownego: suma nie istnieje.

Spróbujmy inaczej: Połączmy dodawane liczby w pary i dodawajmy sumy tych par:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+0+\ldots=0.$$

A więc sumą jest zero? Sprawdzamy:

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots=1+0+0+\ldots=1.$$

Z łącznością niezbyt dobrze. Może lepiej z przemiennością?

$$\begin{aligned}1+1-1+1-1+\ldots&=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots\\&=(-1)^0+(-1)^2+(-1)^4+(-1)^1+(-1)^6+\ldots+(-1)^{2k-1}+(-1)^{2k+4}+.=\ldots\end{aligned}$$

(przestawiliśmy kilka pierwszych składników, ale żadnego nie zgubiliśmy, prawda?)

$$\ldots=(1+1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots=2+0+0+\ldots=2.$$

Najlepiej umówić się, że takie dodawanie nie ma sensu: kłopot z głowy. Ale przecież

$$(**)\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}.$$

W to też nikt nie wątpi, mamy tu przecież do czynienia z sumą nieskończonego ciągu geometrycznego. Można pokazać, że jakkolwiek byśmy przestawiali i łączyli w grupy składniki tej sumy nieskończonej, to wynik zawsze będzie ten sam — nawet, gdyby dodać najpierw wszystkie składniki dodatnie, a potem wszystkie ujemne. (Spróbujcie to zrobić dla (*)!):

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Na czym polega więc różnica między sumami (*) i (**)?

Może na tym, że w (**) kolejne wyrazy tworzą ciąg zbieżny do zera, a w (*) — nie? Zobaczmy:

$$(***)\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.$$

Tu składniki tworzą ciąg zbieżny do zera. Pogrupujmy:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{2^1}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^k+1}\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)+\ldots$$

W k-tym nawiasie mamy $2^{k+1}-2^k=2^k$ składników, z których każdy jest nie mniejszy niż $\frac{1}{2^{k+1}}$, zatem suma w k-tym nawiasie jest nie mniejsza od $2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$.

Wobec tego $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots>n\cdot\frac{1}{2}\ (\text{dla } n=1,2,\ldots)$$

i nie ma takiej liczby rzeczywistej, która by spełniała tę nierówność. A więc: zbieżność ciągu składników do zera nie ratuje naszego dodawania. Nie o to, a w każdym razie nie tylko o to tu chodzi. Szukajmy dalej:

$$(****)\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Rozwiązanie zadania F 32.

Rozważmy element drutu o długości dx i przekroju poprzecznym S (patrz rysunek poniżej). Element ten znajduje się pod napięciem, σ, wynikającym z siły ciężkości części drutu znajdującej się pod nim. Wartość napięcia σ wynosi: $\sigma=\rho(l-x)g$, gdzie ρ jest gęstością materiału, z którego został wykonany drut.

Zgodnie z prawem Hooke'a element dx ulegnie deformacji (wydłużeniu) o odcinek ds

$$\sigma=E\frac{ds}{dx},$$

gdzie E jest modułem Younga materiału, z którego wykonany jest drut. Całkowitą deformację drutu obliczymy sumując przyczynki od poszczególnych elementów:

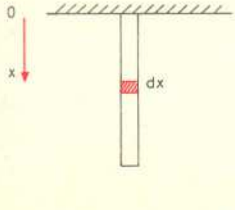
$$s=\int ds=\int_0^l\frac{\sigma}{E}dx=\frac{\rho g}{E}\int_0^l(l-x)dx=\frac{\rho g l^2}{2E}.$$

Jednocześnie wiadomo, że prędkość rozchodzenia się odkształceń sprężystych w drucie wyraża się wzorem:

$$v^2=E/\rho.$$

Stąd ostatecznie:

$$s=\frac{gl^2}{2v^2}\simeq 5\cdot10^{-4}\text{ cm}.$$



Rozwiązanie zadania M 94.

Z oczywistej nierówności $\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geqslant 0$ wynika (po podniesieniu do kwadratu) nierówność

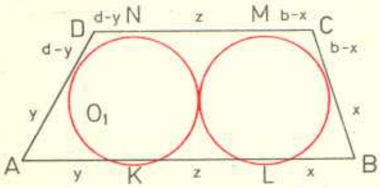
(*) $\qquad a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$

Podnosząc do kwadratu obie strony równości $1 = a+b+c$ otrzymujemy wobec (*)

$1 = a^2+b^2+c^2+2\,(ab+bc+ca) \geqslant$
$\geqslant 3(ab+bc+ca)$, skąd natychmiast wynika żądana nierówność.

Rozwiązanie zadania M 96.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku.



Czworokąt *KLMN* jest oczywiście prostokątem.

Mamy

$a = x+y+z,\ c = b+d-x-y+z.$

Dodając stronami te równości otrzymujemy $a+c = b+d+2z$,

skąd $z = \frac{1}{2}(a+c-b-d).$

Prostokąt *KLMN* jest więc kwadratem, O_1O_2 równe jest więc sumie promieni okręgów, które są wobec tego styczne (zewnętrznie).

Ta suma jest bardzo podobna do (**) — może ma wszystkie potrzebne własności? Oznaczmy:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

(liczbę s_n nazywamy n-tą sumą częściową sumy (****)).

Mamy:

$$s_{2k} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)$$

(możemy łączyć w pary, bo s_n jest sumą skończonej ilości składników), wobec czego

$$0 < s_{2k} < s_{2(k+1)} \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

bo $s_{2(k+1)}$ różni się od s_{2k} o dodatni składnik $\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)$. A więc ciąg liczbowy (s_{2k}) jest rosnący. Ponadto

$$s_{2k} = 1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2k-2}+\frac{1}{2k-1}\right) + \left(-\frac{1}{2k}\right).$$

Wszystkie składniki w nawiasach są ujemne, zatem

$$s_{2k} < 1 \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

co oznacza, że ciąg (s_{2k}) jest ograniczony z góry. Ponieważ każdy ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny, to istnieje taka liczba s, że

$$s_{2k} \underset{k}{\rightarrow} s.$$

Stąd i z faktu, że składniki tworzą ciąg zbieżny do zera, wynika, że również ciąg nieparzystych sum częściowych (s_{2k-1}) jest zbieżny do s:

$$s_{2k-1} = s_{2k} - \left(-\frac{1}{2k}\right) = s_{2k} + \frac{1}{2k} \xrightarrow[k]{} s+0 = s,$$

i wobec tego cały ciąg sum częściowych jest zbieżny do tej granicy:

$$s_n \xrightarrow[n]{} s.$$

Łatwo stąd widać, że jakąkolwiek przyjęlibyśmy zasadę łączenia składników w grupy (bez przestawiania), to otrzymywane sumy częściowe będą dążyły do s (bo będą tworzyły podciąg ciągu (s_n)). Możemy więc uznać, że suma (****) istnieje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = s.$$

Dowodzi się, że $s = \ln 2 \approx 0{,}6931471806$, ale to już zupełnie inna historia.

A co z przemiennością? Zobaczmy. Przyjmiemy następującą zasadę dodawania. Pierwszym składnikiem jest 1. Następnie dodajemy grupę 2^{k-1} nie wykorzystanych wyrazów dodatnich i najwcześniejszy nie wykorzystany wyraz ujemny, potem 2^k wyrazów dodatnich i kolejny wyraz ujemny — i tak dalej ($k = 1, 2, \dots$). Oczywiście w ten sposób wyczerpiemy wszystkie składniki naszej sumy (kto nie wierzy, niech przeczyta *Ponure skutki nieznajomości teorii mnogości*, „Delta" 12/1975).

Otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} - \frac{1}{2k}\right) + \dots$$

Każdy składnik dodatni k-tego nawiasu jest nie mniejszy niż $\frac{1}{2^{k+1}}$, a jest ich 2^{k-1}. Zatem suma składników w nawiasie jest nie mniejsza od $2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2k}$,

skąd wynika, że dla $k \geqslant 3$ wyrażenie w k-tym nawiasie jest nie mniejsze od 1/12. Zatem, gdyby dodawanie (****) było przemienne, to otrzymalibyśmy

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n} \geqslant 1 + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots >$$
$$> \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots > n\,\frac{1}{12}$$

dla każdego n naturalnego, co znów jest wynikiem mało sensownym: (****) jest przykładem dodawania łącznego co prawda, ale całkiem nie przemiennego. Co z tego wszystkiego wynika lub co wyniknąć powinno?

Zadania: 1. Wykazać, że jeśli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do zera, to sumie nieskończonej

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots$$

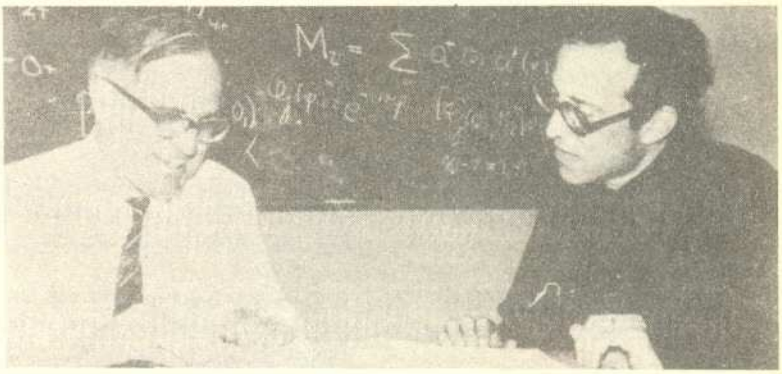
można zawsze przypisać wartość liczbową (jest to tw. Leibniza; dowód jest prostym uogólnieniem rozważań dotyczących (****)).

2. Udowodnić, że suma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n!\pi}{x},$$

gdzie x oznacza numer roku urodzenia Czytelnika, jest dobrze określona i nie zależy od łączenia i przestawiania składników.

Nagroda Nobla z fizyki 1975 r.



Aage Bohr Ben Mottelson

Prof. dr Adam SOBICZEWSKI

W 1975 r. nagroda Nobla z fizyki została przyznana trzem fizykom jądrowym — dwóm Duńczykom: A. Bohrowi i B. Mottelsonowi oraz Amerykaninowi J. Rainwaterowi. Otrzymali oni ją za prace z teorii struktury jądra atomowego. Aage Bohr jest synem Nielsa Bohra, twórcy teorii budowy atomu. Urodził się w Kopenhadze w 1922 roku, tj. w tym samym roku, w którym jego ojciec otrzymał nagrodę Nobla za prace nad teorią atomu. Ukończył Uniwersytet Kopenhaski i od 1946 r. pracuje w Instytucie Fizyki Teoretycznej tego Uniwersytetu. Instytut ten założony został w 1921 r. przez Nielsa Bohra i po jego śmierci przemianowany został na Instytut Nielsa Bohra. Aage Bohr jest członkiem Duńskiej Akademii Nauk, Norweskiej Akademii Nauk oraz Amerykańskiej Akademii Sztuki i Nauk. Ben Mottelson urodził się w 1926 r. w Stanach Zjednoczonych. Tam też ukończył studia wyższe. W roku 1951 przeniósł się do Kopenhagi, gdzie pracuje dotychczas. Przyjął obywatelstwo duńskie. Współpracuje bardzo blisko z Aage Bohrem. James Rainwater urodził się w 1917 r. w Stanach Zjednoczonych, gdzie także ukończył studia wyższe. Jest profesorem w Uniwersytecie Columbia w Nowym Jorku.

Spróbujmy przyjrzeć się tym spośród osiągnięć naukowych wymienionych trzech fizyków, które stały się najbardziej znane i cenione i za które w rezultacie otrzymali nagrodę Nobla. Cykl tych osiągnięć rozpoczął się ok. 1950 r. W tym czasie istniały dwa podstawowe wyobrażenia o strukturze, czy, jak mówimy, dwa podstawowe modele struktury jądra. Jeden — ugruntowany już dawno — to model kroplowy, przedstawiający jądro jako kroplę nieściśliwej, naładowanej elektrycznie (obecność protonów w jądrze) cieczy. Drugi — bardzo wówczas nowy — to model powłokowy, opracowany w latach 1948 – 50 przez Marię Goeppert-Mayer i Hansa Jensena (za co otrzymali oni nagrodę Nobla w 1963 r.). Model kroplowy jest modelem nukleonów silnie skorelowanych. Najmniejsza zmiana w położeniu czy prędkości (lub lepiej — zmiana stanu) jednego nukleonu jest silnie odczuwana przez pozostałe nukleony. Model powłokowy jest zaś modelem nukleonów nieskorelowanych. Według modelu tego każdy nukleon porusza się w potencjale wytworzonym przez pozostałe, oddziałujące na niego nukleony. Przyjmuje się, że zmiana stanu jednego nukleonu nie wpływa na ten potencjał (potencjał jądrowy), a więc i na ruch pozostałych nukleonów. W tym sensie nukleony poruszają się niezależnie. Model powłokowy wydaje się zatem przeciwstawny do modelu kroplowego i dlatego, jako młodszy, przyjmowany był przez fizyków z dużymi oporami.

James Rainwater