Tylko cyrklem

Dr Marek KORDOS

W artykule M. Bryńskiego (»Delta«, 6, 1976) podane zostało kryterium analityczne (czyli rachunkowe), jakie spełniają wszystkie punkty konstruowalne (z pewnego układu danych wyjściowych) za pomocą cyrkla i linijki. Tutaj spróbuję przekonać Czytelników, że jeżeli ograniczymy środki konstrukcyjne eliminując linijkę, to zbiór punktów konstruowalnych nie zmieni się. Czyli, że samym cyrklem można skonstruować wszystkie te punkty, które mogą być skonstruowane cyrklem i linijką. Udowodnił to matematyk włoski *Mascheroni* (maskeroni) i opublikował w 1797 roku w pracy *Geometria del compasso* (geometria cyrkla). Wiedziano o tym zresztą już sto lat wcześniej (np. Duńczyk *Mohr* (mor) w książce *Euklides Danicus* (Euklides duński)), ale zwyczajowo przypisuje się ten rezultat Mascheroniemu ze względu na ścisłość i kompletność jego pracy.
Umówimy się, że dalej małe litery łacińskie a, b, c, d oznaczać będą proste, duże litery łacińskie A, B, C, D, O, P — punkty. Napis pr.AB oznacza prostą przechodzącą przez punkty A i B, o(A, BC) — okrąg o środku A i promieniu BC. Napis

$$a:\quad a \perp b \wedge A \in a$$

będziemy odczytywać: *a jest prostą prostopadłą do b przechodzącą przez A*. Sądzę, że po tych ustaleniach dalej używane wzory będą zrozumiałe.
W szczególności konstrukcje cyrklem i linijką pozwalają nam wykonywać następujące czynności:
jeśli punkty A, B, C, proste a, b i okręgi o_1, o_2 są dane bądź uzyskane w poprzednich etapach konstrukcji, to możemy uzyskać jeszcze

$$1.\ c:\ c = \text{pr. } AB$$

$$2.\ o_3:\ o_3 = \text{o}\,(A, BC)$$

$$3.\ D:\ \{D\} = a \cap b$$

(o ile proste a i b nie są równoległe)

$$4.\ D_1, D_2:\ \{D_1, D_2\} = a \cap o_1$$

(o ile prosta a nie leży za daleko od środka okręgu o_1)

$$5.\ D_1, D_2:\ \{D_1, D_2\} = o_1 \cap o_2$$

(o ile okręgi nie leżą zbyt daleko, ani zbyt blisko).

Rezultat Mascheroniego polega na wykazaniu, że skreślenie z tej listy czynności 1, 3 i 4 nie zmieni otrzymanego zbioru punktów. Abyśmy i my mogli ten rezultat uzyskać, musimy udowodnić, że odpowiednio wykonując czynności 2 i 5 możemy
(*) mając dane A, B, A_1, B_1 takie, że $A \neq B$ i $A_1 \neq B_1$ znaleźć

$$C:\ \{C\} = \text{pr. } AB \cap \text{pr. } A_1 B_1,$$

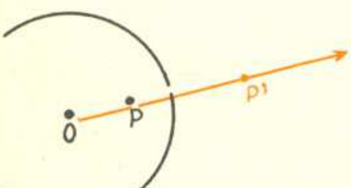
o ile pr. $AB \nparallel$ pr. A_1B_1
(**) mając dane o_1 i A, B takie, że $A \neq B$ znaleźć

$$D_1, D_2:\qquad \{D_1, D_2\} = \text{pr. } AB \cap o_1.$$

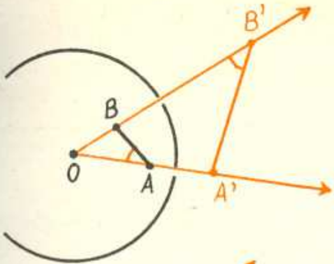
Czynności (*) i (**) zastąpią czynności 3 i 4. Czynności 1 nie musimy zastępować, bo nie prowadzi ona do uzyskania nowych punktów.

INWERSJA

zwana też *symetrią względem okręgu* będzie naszym głównym narzędziem. Zapomnijmy więc na chwilę o naszym zamierzeniu i zajmijmy się badaniem własności tego pojęcia. Trzeba je najpierw zdefiniować.



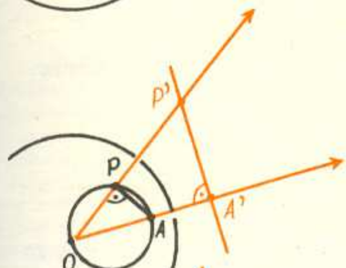
Punkty P i P' są symetryczne względem okręgu o(O, α), *gdzie α jest liczbą dodatnią, wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na tej samej półprostej o początku w O i* $OP \cdot OP' = \alpha^2$.
Zauważmy, że nie istnieje punkt symetryczny do O względem o(O, α), zaś punkty okręgu o(O, α) są same do siebie symetryczne.
Inwersją względem o(O, α) *nazywamy przekształcenie przyporządkowujące każdemu punktowi $P \neq O$ punkt P' symetryczny do P względem* o(O, α).



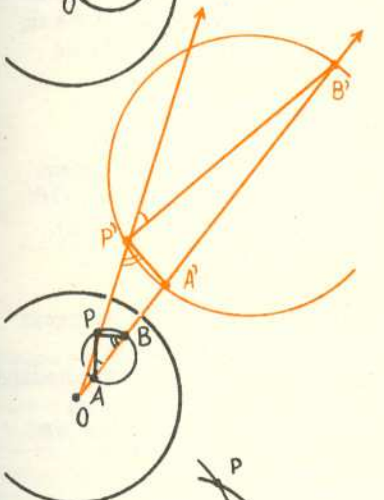
Potrzebne nam własności inwersji są prostymi konsekwencjami następującego twierdzenia:
Jeśli punkty A i B są symetryczne względem $o(O, \alpha)$ *do punktów A' i B', to* $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OB'A'$.
Dowód: Trójkąty OAB i $OB'A'$ są podobne, bo mają kąt wspólny ($\sphericalangle AOB$) oraz

$$OA = \frac{\alpha^2}{OA'} \qquad \text{i} \qquad OB = \frac{\alpha^2}{OB'}$$

czyli $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OB'}{OA'}$. Stąd teza.

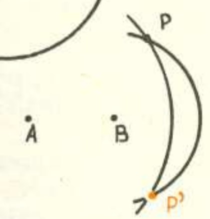


Wynika stąd, że
(I) *Obrazem okręgu przechodzącego przez O w inwersji względem* $o(O, \alpha)$ *jest prosta nie przechodząca przez O.*
Jest nią mianowicie prosta prostopadła do średnicy przekształcanego okręgu przechodzącej przez O i przechodząca przez obraz drugiego końca tej średnicy. Dowód odczyta Czytelnik z rysunku.
(II) *Obrazem prostej nie przechodzącej przez O w inwersji względem* $o(O, \alpha)$ *jest okrąg przechodzący przez O.*
Jest tak dlatego, że dwukrotne wykonanie inwersji względem tego samego okręgu jest tożsamością.
(III) *Obrazem prostej przechodzącej przez O w inwersji względem* $o(O, \alpha)$ *jest ta sama prosta.*
To chyba nie wymaga dowodu. I wreszcie
(IV) *Obrazem okręgu nie przechodzącego przez O w inwersji względem* $o(O, \alpha)$ *jest okrąg.*



Przekształcamy mianowicie średnicę $\overline{AB}$ (patrz rysunek) a następnie stwierdzamy, że dla dowolnego punktu P okręgu przekształcanego kąt $A'P'B'$ jest prosty.
Jako zadanie dla Czytelników pozostawiamy wykazanie, że
(V) *Jeżeli styczne do okręgu* o_1 *poprowadzone w punktach przecięcia* o_1 *z* $o(O, \alpha)$ *przechodzą przez O, to obrazem* o_1 *w inwersji względem* $o(O, \alpha)$ *jest* o_1.

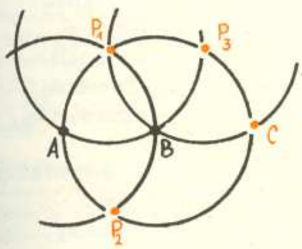
PROSTE KONSTRUKCJE CYRKLEM



Zadanie: Znaleźć obraz symetryczny P' punktu P względem prostej AB.
Rozwiązanie: Dane A, B, P (parami różne). Konstruujemy

$$\begin{array}{ll} o_1: & o_1 = o(A, AP) \\ o_2: & o_2 = o(B, BP) \\ P': & \{P, P'\} = o_1 \cap o_2 \end{array}$$

Prawda?
A co otrzymamy z następującej konstrukcji?
Dane: A, B (różne)



$$\begin{array}{ll} o_1: & o_1 = o(A, AB) \\ o_2: & o_2 = o(B, BA) \\ P_1, P_2: & \{P_1, P_2\} = o_1 \cap o_2 \\ o_3: & o_3 = o(P_1, P_1 A) \\ P_3: & \{A, P_3\} = o_3 \cap o_2 \\ o_4: & o_4 = o(P_3, P_3 P_1) \\ C: & \{P_1, C\} = o_4 \cap o_2 \end{array}$$

Oczywiście C jest obrazem symetrycznym punktu A względem punktu B. Możemy więc za pomocą samego cyrkla konstruować obrazy symetryczne punktu P względem (nie narysowanej!) prostej — oznaczać tę konstrukcję będziemy przez $S_{pr\cdot AB}(P)$ i względem punktu $- S_A(P)$. Można też znaleźć środek $M(AB)$ punktów A i B — przepis na marginesie — proszę wykonać rysunek.
Możemy też znaleźć rzut prostokątny punktu P na prostą AB — jest to przecież

$$M(P\, S_{pr\cdot AB}(P)).$$

Możemy również znaleźć punkt prostej prostopadłej do pr. AB w punkcie B. Jest nim punkt

$$D: \qquad \{B, D\} = o_3 \cap o_4$$

gdzie o_3 i o_4 uzyskujemy jak w konstrukcji symetrii środkowej.

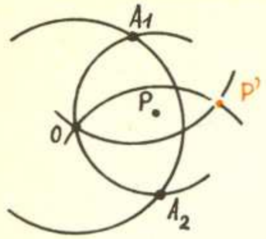
Dane: A, B (różne)

$$\begin{array}{ll} C: & C = S_B(A) \\ o_1: & o_1 = o(A, AB) \\ o_2: & o_2 = o(C, CA) \\ P_1, P_2: & \{P_1, P_2\} = o_1 \cap o_2 \\ o_3: & o_3 = o(P_1, P_1 A) \\ o_4: & o_4 = o(P_2, P_2 A) \\ D: & \{A, D\} = o_3 \cap o_4 \end{array}$$

Trójkąty AP_1D i ACP_1 są podobne, bo mają kąt wspólny i są równoramienne. Zatem

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AP_1} = \frac{AP_1}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

Punkty A, B, D jako równoodległe od P_1 i P_2 leżą na jednej prostej. A więc D jest środkiem AB.



KONSTRUUJEMY OBRAZY INWERSYJNE

Najpierw inwersja punktu.

Dane: $o = o(O, \alpha)$ **i** $P \neq O$

$$\begin{array}{ll} o_1: & o_1 = o(P, PO) \\ A_1, A_2: & \{A_1, A_2\} = o_1 \cap o \\ o_2: & o_2 = o(A_1, A_1O) \\ o_3: & o_3 = o(A_2, A_2O) \\ P': & \{O, P'\} = o_2 \cap o_3 \end{array}$$

Trójkąty OA_1P i $OP'A_1$ są podobne, bo mają kąt wspólny i są równoramienne. Zatem

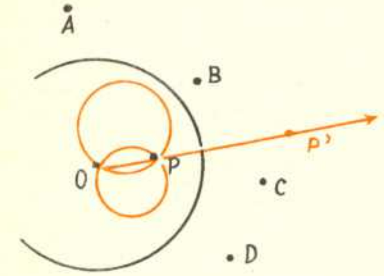
$$\frac{OP}{OA_1} = \frac{OA_1}{OP'}$$

czyli $OP \cdot OP' = (OA_1)^2 = \alpha^2$. Ponieważ punkty O, P, P' są jednakowo odległe od A_1 i A_2, więc... udało się.

Jest jednak jedno „ale": mogą nie istnieć punkty A_1 i A_2. Gdy jednak P leży za blisko O, to zamiast P bierzemy $P_1 = S_P(O)$, gdy i dla P_1 konstrukcja nie da się wykonać, to bierzemy $P_2 = S_{P_1}(O)$ itd, aż konstrukcja dla pewnego P_n da się wykonać dając P'_n. Czytelnik zechce wykazać, że jeśli dla P'_n wykonamy analogiczne symetrie jak dla P, to otrzymamy żądany punkt P'.

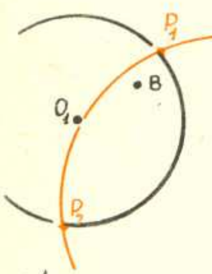
$P'_{n-1} = S_{P'_n}(O)$
$P'_{n-2} = S_{P'_{n-1}}(O)$
itd.
$P' = S_{P'_1}(O)$

Teraz znajdziemy obraz pr. AB w inwersji względem $o(O, \alpha)$. Wobec (III) wystarczy rozpatrzeć tylko przypadek, gdy $O \notin$ pr. AB. Niech P będzie rzutem prostokątnym O na pr. AB (umiemy go znaleźć). Niech C będzie środkiem OP'. Z (II) wynika, że $o(C, CO)$ jest obrazem pr. AB w inwersji względem $o(O, \alpha)$.



JAK MASCHERONI

Znalezienie za pomocą cyrkla przecięcia pr. AB i pr. CD teraz już nie nastręcza trudności — znajdujemy obraz inwersyjny obu prostych względem okręgu $o(O, \alpha)$ takiego, że $O \notin$ pr. $AB \cap$ pr. CD. Otrzymujemy okręgi o_1 i o_2 przechodzące przez O. Oznaczmy przez P drugi punkt przecięcia o_1 i o_2. Wówczas P' jest punktem przecięcia naszych prostych. Zaś gdy o_1 i o_2 są styczne, to proste AB i CD są równoległe.



Gdy chcemy znaleźć przecięcie pr. AB z okręgiem $o_1 = o(O_1, \alpha_1)$ i gdy $O_1 \notin$ pr. AB, sprawa jest jeszcze mniej kłopotliwa. Znajdujemy obraz o_2 prostej AB w inwersji względem o_1. Jeżeli P_1 i P_2 są przecięciami o_1 i o_2, to są również przecięciami o_1 i pr. AB (czemu?).

Jedynym zatem kłopotliwym przypadkiem jest poszukiwanie przecięcia prostej AO_1 z okręgiem $o_1 = o(O_1, \alpha_1)$. W tym przypadku obieramy taki punkt C, który nie leży na prostej AO_1 i taki, że $CO_1 > \alpha_1$. Niech C_1 będzie środkiem CO_1. Niech punkty D_1 i D_2 będą przecięciami $o(C_1, C_1C)$ z o_1. Okrąg $o = o(C, D_1)$ ma styczne w D_1 i D_2 przechodzące przez O_1 (proszę uzasadnić). Wobec tego na mocy (V) obrazem o_1 w inwersji względem o jest o_1. Niech o_2 będzie obrazem pr. AO_1 względem o. Jeśli zatem P_1 i P_2 są przecięciami o_1 i o_2, to P'_1 i P'_2 (względem o) są przecięciami o_1 i pr. AB.

Udowodniliśmy zatem, że Mascheroni miał rację. Możemy więc każdą konstrukcję, wykonalną cyrklem i linijką, wykonać samym cyrklem. Wiemy nawet jak. Oczywiście na ogół istnieje konstrukcja prostsza od tej, którą uzyskalibyśmy naśladując w podany wyżej sposób znane konstrukcje cyrklem i linijką.