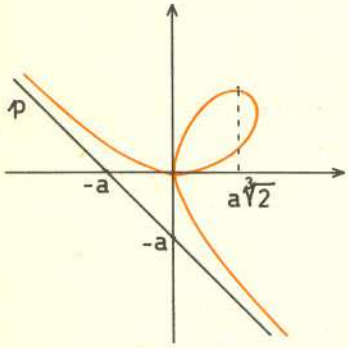
Wyobraźmy sobie teraz, że po płaszczyźnie porusza się punkt. Intuicyjnie wiemy, co to znaczy, ale jak to wyrazić analitycznie? Otóż, niech (t_0, t_1) będzie pewnym przedziałem (skończonym lub nie), którego punkty t nazywać będziemy czasem. Jeżeli współrzędne x, y są ciągłymi funkcjami czasu: $x = x(t)$, $y = y(t)$, to zależność tę nazywać będziemy ruchem punktu. Poruszający się punkt wyznacza zbiór $\{(x(t), y(t))\}_{t\in(t_0, t_1)}$, który nazwiemy torem albo krzywą punktu.

Rugując czas z równań $x = x(t)$, $y = y(t)$ otrzymamy związek $F(x, y) = 0$ identyczny z równaniem definiującym krzywą w sensie Kartezjusza.

Rozpatrzone krzywe: linia łańcuchowa i ślimak Pascala są torami punktu w podanym wyżej sensie. Zapisać je bowiem można w postaci $x = t$, $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}\right)$ (linia łańcuchowa), $x = a\cos^2 t + l\cos t$, $y = a\cos t\sin t + l\sin t$ (ślimak Pascala). Innym przykładem toru punktu jest liść Kartezjusza (rys. 7), określony równaniami



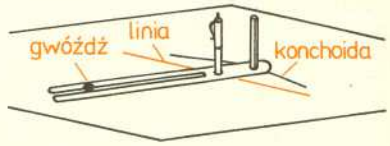
Rys. 7

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad a > 0, \quad t \neq -1. \tag{8}$$

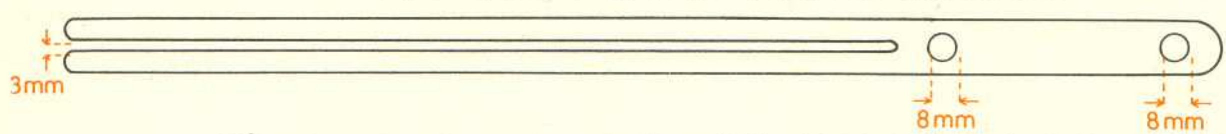
Krzywa ta ma asymptotę o równaniu $x+y+a = 0$. Przy $t \to \pm\infty$ obie współrzędne $x(t)$ i $y(t)$ dążą do 0. Punkt (0,0) otrzymuje się więc dwukrotnie dla $t = 0$ i $t = \infty$. Gdy t zmierza od $-\infty$ do -1, to punkt (x, y) wychodząc z punktu (0,0) oddala się po prawej gałęzi do nieskończoności, gdy t zmienia się od -1 do 0, to punkt ten wraca z nieskończoności po lewej gałęzi do punktu (0,0), wreszcie przy wzrastaniu t od 0 do $+\infty$ punkt przebiega pętlę w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Rugując z równań (8) czas otrzymujemy $x^3+y^3-3axy = 0$. Związek ten pochodzi od Kartezjusza, który zastanawiał się (1638) nad kształtem krzywej, dla której suma objętości sześcianów utworzonych z odcinków o długościach równych współrzędnym punktu (x, y) jest równa objętości prostopadłościanu utworzonego z odcinków, których długości są równe x, y oraz pewnej stałej. Niedługo potem znaleziono fragment tej krzywej, mianowicie środkową pętlę, i nazwano ją „liściem jaśminu". Pełny wykres liścia podali Huygens i Bernoulli. Nazwa liść Kartezjusza utrwaliła się dopiero na początku XVIII wieku.

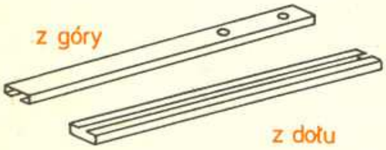
Przedstawione krzywe są krzywymi płaskimi. Podane definicje można zmodyfikować tak, aby opisywały krzywe przestrzenne. Istnieje wiele interesujących przykładów opisujących ruch w trójwymiarowej przestrzeni fizycznej, ale do tych problemów powrócimy innym razem.

Rysujemy konchoidy



Wytnijcie ze sklejki (0,5 do 1,0 cm) kształt jak na rysunku. Otrzymany przyrząd jest najprostszym konchoidografem, a więc służy do rysowania konchoid.

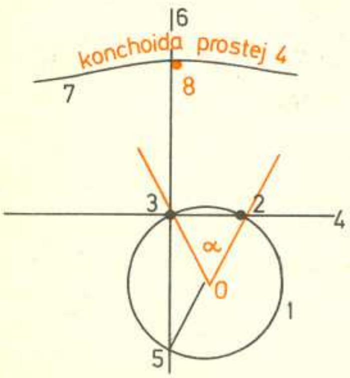




Potrzebny nam jeszcze będzie gwoździk o dużym łepku (np. tapicerski lub papowiec) i kawałek płyty (lub stół sosnowy, w który wolno nam wbijać gwoździe), jako podkładka. W jednym z otworów konchoidografu mocujemy ołówek, w drugi wkładamy wypisany już długopis. Na podkładce kładziemy arkusz papieru z narysowaną linią, dla której chcemy narysować konchoidę i przypinamy go pineskami. Następnie wbijamy gwoździk tak, żeby pod jego łepek można było wsunąć wycięcie konchoidografu. Gdy będziemy wodzili długopisem po linii, ołówek narysuje nam jedną gałąź konchoidy. Po zamianie miejscami ołówka i długopisu uzyskamy drugą gałąź. Na pewno każdy zauważył, że nie można takim konchoidografem narysować każdej konchoidy. Można jednak z cienkiej blaszki wykonać lepszy. Sądzę, że rysunek wystarczy jako objaśnienie jak to zrobić.

A czy umielibyście zrobić konchoidograf rysujący od razu obie gałęzie konchoidy (czyli na dwa ołówki)?

Jest rzeczą ciekawą, że konchoidografem można wykonać tzw. konstrukcje platońskie (patrz artykuł M. Bryńskiego »Delta« 6/1976). Obok podajemy konstrukcję podziału kąta na trzy równe części. Potrzebna do tego jedna (zewnętrzna) gałąź konchoidy prostej (czyli konchoidy Nikomedesa). Sprawdźcie, że konstrukcja jest poprawna.



a — odległość środków konchoidografu,

okrąg 1 ma promień $\frac{a}{2}$.

Gdy gwóźdź wbijemy w 0, to $\sphericalangle 308 = \frac{1}{3}a$.