O ślimakach, liściach i łańcuchach

Dr Wiesław KUFEL

Zacznijmy od łańcucha. Co to takiego — odpowiedzieć można na przykład tak: szereg połączonych ze sobą jednakowych części, zwanych ogniwami, tworzących rodzaj sznura. Łańcuchy znane były od dawna — w epoce brązu kobiety nosiły je jako ozdoby, a w epoce żelaza służyły już do podnoszenia ciężarów. Jedne i drugie różniły się pewnie masą i kształtem. Stosowany obecnie w różnych mechanizmach łańcuch przegubowy zaprojektował jeszcze Leonardo da Vinci. Inny wielki Włoch, Galileo Galilei (Galileusz), interesował się odpowiedzią na pytanie: jaką krzywą wyznacza łańcuch zawieszony w dwu punktach? Odpowiedź: „poszukiwaną krzywą jest zwykła parabola" znalazł w 1638 roku. Odpowiedź ta była błędna. Poprawne rozwiązanie podali nieco później Leibniz, Huygens i Bernoulli. Prześledźmy ich argumentację.

Christian Huygens (1629–95), holenderski fizyk i matematyk. Podał zarys teorii falowej światła oraz wyjaśnił za jej pomocą wiele zjawisk optycznych, podał teorię ruchu wahadła matematycznego, pierwszy skonstruował zegar wahadłowy, opracował nowe metody szlifowania i polerowania soczewek, zbudował teleskop, za pomocą którego odkrył jeden z księżyców Saturna, badał krzywe; podał sposób obliczania powierzchni brył obrotowych napisał pierwszy podręcznik z zakresu rachunku prawdopodobieństwa.

Jean Bernoulli (1667–1748), szwajcarski fizyk i matematyk. Zapoczątkował rachunek wariacyjny, autor pierwszego wykładu rachunku całkowego, badał ruch ciał w ośrodkach stawiających opór.

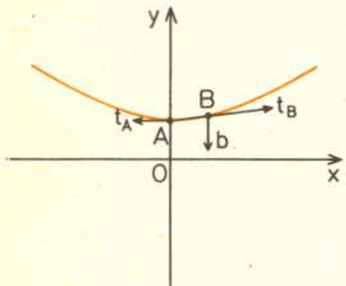
Załóżmy najpierw, że masa łańcucha jest rozmieszczona równomiernie wzdłuż całej jego długości. Znaczy to, że przyrost masy na jednostkę długości jest stały, równy ϱ. Wprowadźmy układ współrzędnych jak na rys. 1.

Oś y jest osią symetrii łańcucha, a odcinek OA ma długość a. Oznaczmy dowolny punkt krzywej przez $B(x, y)$ oraz długość łuku $\overset{\smile}{AB}$ przez S. Jeżeli łańcuch znajduje się w położeniu równowagi, to można założyć, że na łuk $\overset{\smile}{AB}$ działają trzy siły: siły naciągu łańcucha $\mathbf{t}_A$, $\mathbf{t}_B$ działające odpowiednio w punktach A i B w kierunku stycznym do krzywej oraz siła $\boldsymbol{b}$ równa ciężarowi łuku $\overset{\smile}{AB}$. Zgodnie z założonym równomiernym rozkładem masy, siła $\boldsymbol{b}$ jest równa $\mathbf{b} = [0, \varrho S]$. Rozłóżmy siłę $\mathbf{t}_B$ na składowe $\mathbf{t}_B = [t^1{}_B, t^2{}_B]$:

(1)
$$t^1{}_B = |\mathbf{t}_B| \cos\alpha,$$
$$t^2{}_B = |\mathbf{t}_B| \sin\alpha.$$

Skoro łańcuch jest w równowadze, to suma sił znika: $\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_B + \mathbf{b} = 0$.
Z ostatniej równości mamy

(2)
$$t^1{}_B = |\mathbf{t}_A| = t,$$
$$t^2{}_B = \varrho S.$$



Rys. 1

Porównując (1) z (2) otrzymujemy równanie

(3)
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varrho}{t} S.$$

Wykorzystując związek $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx}$ równość (3) możemy przepisać w postaci

$$S = \frac{t}{\varrho} \frac{dy}{dx}.$$

Wielkość charakteryzującą nieskończenie mały przyrost długości łuku nazywamy różniczką łuku i oznaczamy dS. Jest ona równa
$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx;$$
stąd $\dfrac{dS}{dx} = = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$.

Różniczkując ostatnie równanie stronami względem x i wykorzystując związek $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ otrzymamy

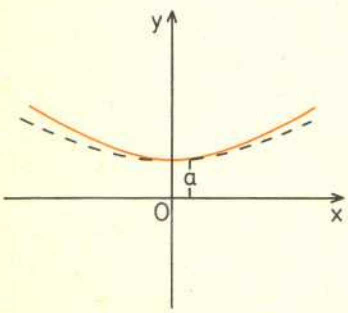
(4)
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varrho}{t} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Równanie (4) jest nieliniowym równaniem różniczkowym, które można rozwiązać wykonując proste całkowania. Zapiszmy w tym celu równanie (4) w postaci

$$\frac{\varrho}{t} = \sqrt{1+p^2}\, \frac{dp}{dx},$$

gdzie $p = p(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Całkując stronami ostatnią równość dostajemy związek

$$\int \sqrt{1+p^2}\, dp = \int \frac{\varrho}{t}\, dx.$$



Rys. 2

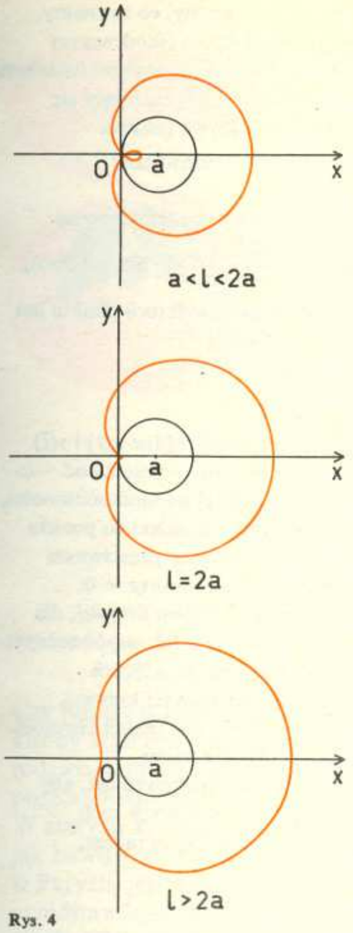
Stąd

(5)
$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{\varrho}{t} x + C.$$

Układ współrzędnych wprowadziliśmy tak, że dla $x = 0$ jest:

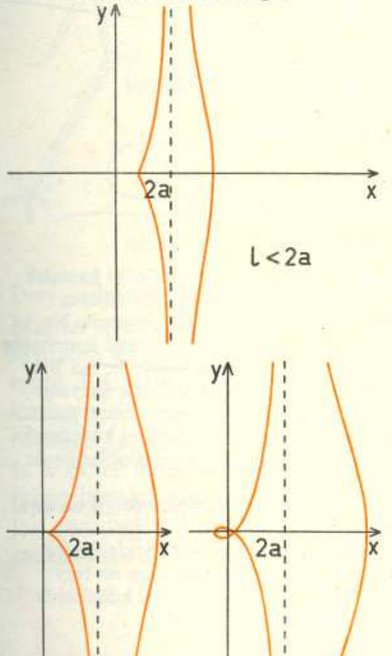
$p = \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = 0$. Zatem w równaniu (5) mamy $C = 0$ i wobec tego

(6)
$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{\varrho}{t} x}.$$



Rys. 4

Blaise Pascal (1623–62), francuski fizyk, matematyk, pisarz i filozof. Sformułował zasadę indukcji matematycznej oraz część podstaw rachunku prawdopodobieństwa, badał zjawiska ciśnienia atmosferycznego, prekursor rachunku różniczkowego.



Rys. 6

Nikomedes, żył w III wieku p.n.e., matematyk grecki, rozwiązał zagadnienie trysekcji kąta (konstrukcyjnego podziału dowolnego kąta na 3 równe części). Omawiana konchoida wynaleziona była przez niego.

Łatwo sprawdzić, że

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\varrho}{t}x} - e^{-\frac{\varrho}{t}x}\right)$$

jest rozwiązaniem równania (6). Rozwiązanie to całkujemy względem x i dostajemy

$$(7) \qquad y(x) = \frac{t}{2\varrho}\left(e^{\frac{\varrho}{t}x} + e^{-\frac{\varrho}{t}x}\right) + C_1.$$

Przyjmijmy teraz, że długość odcinka OA równa jest $\frac{t}{\varrho} = a$, wtedy dla $x = 0$, $y = a$ i z równania (7) mamy $C_1 = 0$. Poszukiwana krzywa, nazwana linią łańcuchową, ma równanie

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Jej wykres przedstawia rys. 2.

Leży ona powyżej paraboli $y = a + \frac{x^2}{2a}$. W pobliżu punktu $(0, a)$ odległości odpowiednich punktów linii łańcuchowej i paraboli są niewielkie, natomiast powiększają się, gdy oddalamy się od tego punktu.

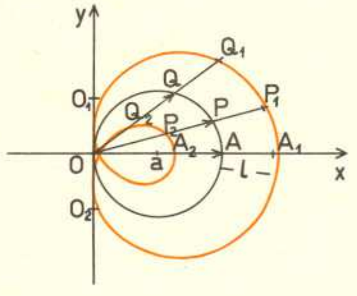
Dotychczas mówiliśmy o krzywej nie określając, co to takiego jest. Choć próby zdefiniowania krzywej były czynione jeszcze w starożytności, dopiero wybitny myśliciel francuski René Descartes (Kartezjusz) podał oparte na wprowadzonym przez siebie pojęciu współrzędnych zadowalające jej określenie.

Niech x, y będą współrzędnymi punktu na płaszczyźnie. Zbiór punktów (x,y) nazywać będziemy krzywą, jeżeli ich współrzędne spełniają związek $F(x, y) = 0$. Funkcja F dwu zmiennych x i y może być dowolna; jeżeli jest wielomianem stopnia n, to krzywą nazywamy algebraiczną stopnia n. Krzywe niealgebraiczne nazywamy przestępnymi. Zgodnie z tą definicją linia łańcuchowa jest krzywą przestępną.

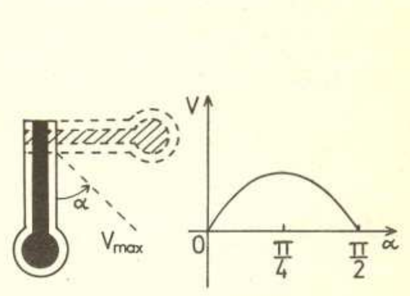
Przykładem krzywej algebraicznej jest tzw. ślimak Pascala. Jest to krzywa stopnia czwartego określona równaniem

$$(x^2-y^2-2ax)^2-l^2(x^2+y^2) = 0.$$

Stałe a i l mają następującą interpretację geometryczną. Rozpatrzmy w kartezjańskim układzie współrzędnych x, y okrąg o promieniu a i środku w punkcie $(a, 0)$. Promieniem wodzącym dowolnego punktu P z tego okręgu będzie wektor OP. Ustalmy l jako długość pewnego odcinka, (rys. 3). Ślimakiem Pascala dla tak ustalonych a i l będzie zbiór punktów, który otrzymuje się przez powiększenie i zmniejszenie promienia wodzącego każdego punktu okręgu o odcinek długości l. Zbiór punktów, który otrzymuje się przez dodawanie l (punkty oznaczone indeksem 1) nazywa się gałęzią zewnętrzną, natomiast zbiór punktów otrzymany przez odejmowanie l (punkty oznaczone indeksem 2) nazywa się gałęzią wewnętrzną. Rysunek 3 przedstawia ślimaka Pascala w przypadku $a > l$. Gdy $a < l < 2a$, $l = 2a$ i $l > 2a$ ślimaki Pascala mają kształt jak na rys. 4.



Rys. 3



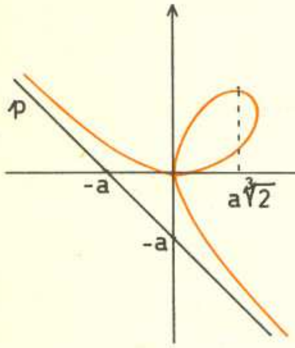
Rys. 5

Ślimak Pascala spełniający warunek $l = 2a$ nosi nazwę kardioidy. Jedna z części mechanizmu podnoszącego i opuszczającego semafor ma kształt ślimaka Pascala, dla którego $a < l < 2a$. W rezultacie prędkość ramienia semafora osiąga maksymalną wartość nie na końcu, lecz w środku ruchu ramienia, tj. dla $\alpha = \pi/4$, (rys. 5). Inaczej mówiąc, dzięki ślimakowi ramię semafora jest hamowane łagodnie.

Inne efektowne zastosowanie znalazł ślimak Pascala w maszynie do szycia — w urządzeniu do nawijania nici na szpulę czółenka. Zamienia on tam ruch obrotowy na ruch jednostajny prostoliniowy.

Ogólniej, rozpatrywać można krzywe, które powstają przez powiększanie i zmniejszanie o dany odcinek l promienia wodzącego każdego punktu pewnej ustalonej krzywej zwanej krzywą bazową. Krzywe takie nazywa się konchoidami (od greckiego konchoeides — podobny do muszli). Tak więc ślimak Pascala jest konchoidą, której krzywą bazową jest okrąg. W przypadku, gdy krzywą bazową jest prosta, otrzymujemy tzw. konchoidę Nikomedesa (rys. 6).

Wyobraźmy sobie teraz, że po płaszczyźnie porusza się punkt. Intuicyjnie wiemy, co to znaczy, ale jak to wyrazić analitycznie? Otóż, niech (t_0, t_1) będzie pewnym przedziałem (skończonym lub nie), którego punkty t nazywać będziemy czasem. Jeżeli współrzędne x, y są ciągłymi funkcjami czasu: $x = x(t)$, $y = y(t)$, to zależność tę nazywać będziemy ruchem punktu. Poruszający się punkt wyznacza zbiór $\{(x(t), y(t))\}_{t \in (t_0, t_1)}$, który nazwiemy torem albo krzywą punktu.



Rys. 7

Rugując czas z równań $x = x(t)$, $y = y(t)$ otrzymamy związek $F(x, y) = 0$ identyczny z równaniem definiującym krzywą w sensie Kartezjusza.

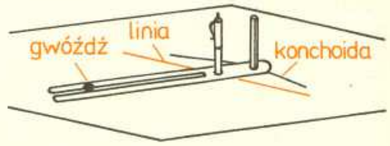
Rozpatrzone krzywe: linia łańcuchowa i ślimak Pascala są torami punktu w podanym wyżej sensie. Zapisać je bowiem można w postaci $x = t$, $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{t}{a}} - e^{-\frac{t}{a}}\right)$ (linia łańcuchowa), $x = a\cos^2 t + l\cos t$, $y = a\cos t \sin t + l \sin t$ (ślimak Pascala). Innym przykładem toru punktu jest liść Kartezjusza (rys. 7), określony równaniami

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad a > 0, \quad t \neq -1. \tag{8}$$

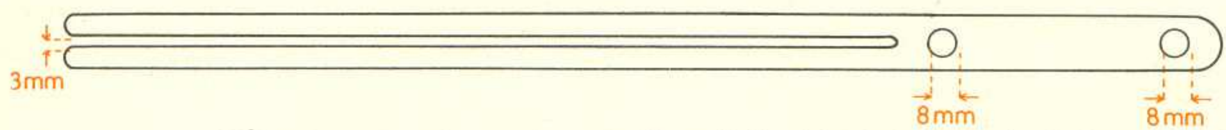
Krzywa ta ma asymptotę o równaniu $x+y+a = 0$. Przy $t \to \pm\infty$ obie współrzędne $x(t)$ i $y(t)$ dążą do 0. Punkt (0,0) otrzymuje się więc dwukrotnie dla $t = 0$ i $t = \infty$. Gdy t zmierza od $-\infty$ do -1, to punkt (x, y) wychodząc z punktu (0,0) oddala się po prawej gałęzi do nieskończoności, gdy t zmienia się od -1 do 0, to punkt ten wraca z nieskończoności po lewej gałęzi do punktu (0,0), wreszcie przy wzrastaniu t od 0 do $+\infty$ punkt przebiega pętlę w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Rugując z równań (8) czas otrzymujemy $x^3+y^3-3axy = 0$. Związek ten pochodzi od Kartezjusza, który zastanawiał się (1638) nad kształtem krzywej, dla której suma objętości sześcianów utworzonych z odcinków o długościach równych współrzędnym punktu (x, y) jest równa objętości prostopadłościanu utworzonego z odcinków, których długości są równe x, y oraz pewnej stałej. Niedługo potem znaleziono fragment tej krzywej, mianowicie środkową pętlę, i nazwano ją „liściem jaśminu". Pełny wykres liścia podali Huygens i Bernoulli. Nazwa liść Kartezjusza utrwaliła się dopiero na początku XVIII wieku.

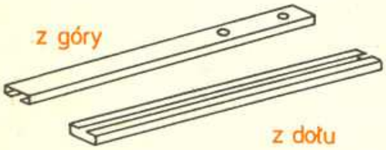
Przedstawione krzywe są krzywymi płaskimi. Podane definicje można zmodyfikować tak, aby opisywały krzywe przestrzenne. Istnieje wiele interesujących przykładów opisujących ruch w trójwymiarowej przestrzeni fizycznej, ale do tych problemów powrócimy innym razem.

Rysujemy konchoidy



Wytnijcie ze sklejki (0,5 do 1,0 cm) kształt jak na rysunku. Otrzymany przyrząd jest najprostszym konchoidografem, a więc służy do rysowania konchoid.

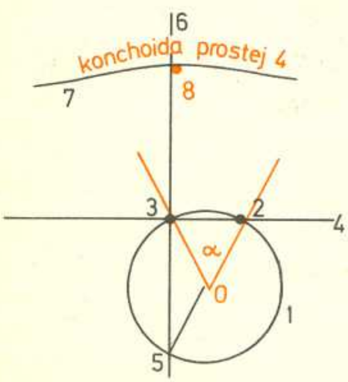




Potrzebny nam jeszcze będzie gwoździk o dużym łepku (np. tapicerski lub papowiec) i kawałek płyty (lub stół sosnowy, w który wolno nam wbijać gwoździe), jako podkładka. W jednym z otworów konchoidografu mocujemy ołówek, w drugi wkładamy wypisany już długopis. Na podkładce kładziemy arkusz papieru z narysowaną linią, dla której chcemy narysować konchoidę i przypinamy go pineskami. Następnie wbijamy gwoździk tak, żeby pod jego łepek można było wsunąć wycięcie konchoidografu. Gdy będziemy wodzili długopisem po linii, ołówek narysuje nam jedną gałąź konchoidy. Po zamianie miejscami ołówka i długopisu uzyskamy drugą gałąź. Na pewno każdy zauważył, że nie można takim konchoidografem narysować każdej konchoidy. Można jednak z cienkiej blaszki wykonać lepszy. Sądzę, że rysunek wystarczy jako objaśnienie jak to zrobić.

A czy umielibyście zrobić konchoidograf rysujący od razu obie gałęzie konchoidy (czyli na dwa ołówki)?

Jest rzeczą ciekawą, że konchoidografem można wykonać tzw. konstrukcje platońskie (patrz artykuł M. Bryńskiego »Delta« 6/1976). Obok podajemy konstrukcję podziału kąta na trzy równe części. Potrzebna do tego jedna (zewnętrzna) gałąź konchoidy prostej (czyli konchoidy Nikomedesa). Sprawdźcie, że konstrukcja jest poprawna.



a — odległość środków konchoidografu,

okrąg 1 ma promień $\frac{a}{2}$.

Gdy gwóźdź wbijemy w 0, to $\sphericalangle 308 = \frac{1}{3} a$.