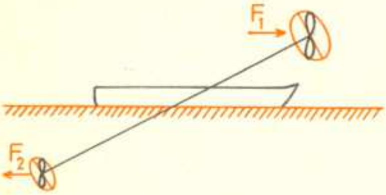
Dziś konkurs i to konkurs dla majsterkowiczów. Proponujemy Wam zbudowanie statku napędzanego siłą wiatru, który mógłby płynąć pod wiatr. Dosłownie pod wiatr i to tym szybciej im silniejszy wiatr wieje. Nie ma mowy o płynięciu zakosami, pod pewnym kątem do wiatru. Znane metody żeglarskie na nic się nie zdadzą. Należy zbudować coś nowego. Eric Lindahl i Peter Kauffman w Seattle (USA) zbudowali taki okręcik. Donosi o tym grudniowy numer Scientific American z ubiegłego roku. Zasada wydaje się być bardzo prosta. Spójrzcie na rysunek.



Na dwóch drewnianych pływakach umieszczona jest cała konstrukcja napędowa. Śmigło znajduje się w powietrzu i połączone jest sztywną osią ze śrubą umieszczoną pod wodą. Konstrukcja podtrzymująca powinna stawiać minimalny opór wiejącemu wiatrowi. Wiatr wieje, śmigło się obraca i napędza śrubę. Śruba napędza statek. Jeżeli skrzydełka śruby są odpowiednio ustawione, to statek płynie pod wiatr. Tylko czy płynie i czy teoretycznie powinien płynąć. Otóż teoretycznie powinien płynąć, a czy popłynie, to tylko od Was zależy. Dlaczego powinien popłynąć? Dokładnych obliczeń nie możemy przytoczyć, ale przeprowadzimy proste rozważanie dotyczące pędu i energii. Siła, z jaką wiatr pcha śmigło, jest proporcjonalna do różnicy prędkości: $F_1 = k_2(v_1 - v_2)$. (Pamiętajmy, że pęd równa się popędowi: $F \cdot t = m \cdot v$). Załóżmy dalej, że nie ma żadnych strat energii przy obrocie osi napędzającej śrubę pod wodą. Cała energia jest przekazywana wodzie. (Łódka jest nieruchoma) $E_3 = k_3 v_3 = E_1$ a ciąg (siła z jaką łódka jest ciągnięta) $F_2 = k_4 v_3$. Nie znamy oczywiście współczynników k_2, k_3, k_4. Przyjmując najbardziej uproszczoną wersję $k_2 = k_3 = k_4$ (co nie odpowiada rzeczywistości) mamy

$$F_2 = v_3 = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}, \qquad F_1 = v_1 - v_2,$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)}{(v_1 - v_2)(v_1 - v_2)}} = \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}} > 1.$$

Te bardzo uproszczone rozważania pokazują, na jakiej zasadzie możliwy jest większy ciąg śruby pod wiatr niż siła, z jaką wiatr pcha na śmigło. Łódź powinna więc po odkotwiczeniu (puszczeniu z rąk) raźnie ruszyć pod wiatr. Efekt będzie tym silniejszy im większa prędkość wiatru. Czy to się uda, zależy od konstrukcji łodzi, oporów przy kręceniu się osi i konstrukcji śmigła. Warto jednak spróbować.

Załóżmy, że nasz stateczek już gotowy stoi zakotwiczony nieruchomo na spokojnej wodzie. Wieje silny wiatr, który napędza śmigło. Nie znamy ani kształtu śmigła, ani jego wymiarów, nasza niewiedza dotyczy w równej mierze śruby. Wiemy jednak, że istnieją zasady zachowania pędu i energii. Śmigło zyskuje energię na koszt wiatru, którego prędkość przed śmigłem wynosi v_1, a tuż za śmigłem $v_2 (v_1 > v_2)$. Energia przekazana śmigłu jest proporcjonalna do różnicy kwadratów prędkości $v_1^2 - v_2^2$ oraz do gęstości powietrza ϱ_1: $E = \alpha_1 \varrho_1 (v_1^2 - v_2^2)$. Siła parcia, z jaką wiatr działa na śmigło, jest proporcjonalna do różnicy prędkości $v_1 - v_2$ oraz do gęstości: $F_1 = \alpha_2 \varrho_2 (v_1 - v_2)$ (Przypominamy, że popęd równa się zmianie pędu $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$). Jeżeli cała energia uzyskana przez śmigło jest przekazana do śruby, a ta kręcąc się wprawia wodę w ruch z prędkością v_3, to energia przekazana wodzie równa się $E = \alpha_3 \varrho_2 v_3^2$, gdzie ϱ_2 jest gęstością wody. Siła ciągu śruby będzie proporcjonalna do v_3: $F_2 = \alpha_4 \varrho_2 v_3$. Obliczmy stosunek F_2/F_1:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{v_3}{v_1 - v_2} = \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}}.$$

Współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ nie znamy, ale możemy tak dobrać kształt śmigła i śruby, aby $\frac{\alpha_4}{\alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}} \geqslant \frac{1}{30}$. Ponieważ $\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} \approx 30$, więc nawet w tym skrajnym przypadku

$$\frac{F_2}{F_1} \approx \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{v_1 - v_2}} > 1.$$

Oczywiście uprościliśmy zagadnienie zaniedbując parcie wiatru na stateczek jako całość, straty energii przy obrocie osi itd. Dzisiejsze zadanie polega nie na obliczeniach teoretycznych, ale na skonstruowaniu takiego stateczku, który popłynie pod wiatr.

Rozwiązanie zadania M 92.

Spośród danych punktów wybierzmy dowolne cztery. Wśród nich są trzy, A, B, C, leżące na jednej prostej k. Niech wśród danych n punktów istnieją dwa, M i N, nie leżące na k. Jeżeli prosta MN jest równoległa do k, to wśród czterech punktów A, B, M, N nie ma trzech leżących na jednej prostej, co przeczy warunkom zadania. Prosta MN przecina więc prostą k. Dwa spośród punktów A, B, C na pewno są różne od punktu przecięcia tych prostych. Niech będą to punkty B i C. Wówczas wśród czterech punktów B, C, M, N nie ma trzech leżących na jednej prostej, co znowu przeczy warunkom zadania. Nasze założenie jest więc fałszywe, czyli poza prostą k leży najwyżej jeden punkt.

A oto warunki konkursu:

1) Zbudowanie stateczku,
2) Nadesłanie go w paczce przesyłką pocztową na adres redakcji wraz z podaniem informacji, w jakich warunkach był sprawdzony.
3) Termin nadsyłania: 1 października 1976.
4) Jury konkursu: doc. dr hab. Tomasz Hofmokl, doc. dr hab. Michał Święcki.
5) Wygrywa stateczek o największej sile ciągu w ustalonych warunkach (pomiar siły dynamometrem).
6) Nagrody książkowe.

Uwaga praktyczna. Strumień powietrza powinien być dostatecznie silny. Stateczek redakcyjny pokazany na ostatniej stronie okładki płynie pod wiatr wywołany odkurzaczem nastawionym na dmuchanie. Ciąg powietrza z suszarki do włosów okazał się niewystarczający.

D.c. rozwiązania zadania F 31.

Przyjmijmy, że w naczyniach A i B mamy po M gramów wody o temperaturach jak poprzednio, t_1 i t_2 ($t_1 > t_2$). Postępujemy jak poprzednio, z tym, że za każdym razem nalewamy do naczynia C m gramów wody chłodnej. Po pierwszej operacji, mamy w naczyniu D m gramów wody ogrzanej od t_2 do x_1, a w naczyniu A M gramów wody oziębionej od t_1 do x_1, przy czym

$$m(x_1-t_2) = M(t_1-x_1),$$

skąd

$$x_1 = \frac{M}{m+M}t_1 + \frac{m}{m+M}t_2 = (1-\alpha)t_1+\alpha t_2, \quad \text{gdzie przez } \alpha \text{ oznaczyliśmy: } \alpha = \frac{m}{m+M} < 1.$$

Po drugiej operacji dolewamy do naczynia D nowych m gramów wody o temperaturze x_2, zostawiając w naczyniu A wodę o tej samej temperaturze, przy czym teraz znowu

$$m(x_2-t_2) = M(x_1-x_2),$$

co daje nam

$$x_2 = \frac{M}{m+M}x_1 + \frac{m}{m+M}t_2 = (1-\alpha)x_1+\alpha t_2.$$

Dla k-tej operacji mamy

$$x_k = (1-\alpha)x_{k-1}+\alpha t_2 = (1-\alpha)^k t_1+\alpha\sum_{j=0}^{k-1}(1-\alpha)^j\cdot t_2.$$

Taka też jest po k operacjach temperatura końcowa wody początkowo gorącej w naczyniu A. Natomiast w naczyniu D mamy teraz $k\cdot m$ gramów wody o temperaturze:

$$T_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j = \left[\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(1-\alpha)^j\right]t_1 + \left[\alpha\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{j-1}(1-\alpha)^l\right]t_2 = \left[\frac{1}{k}\,\frac{(1-\alpha)[1-(1-\alpha)^k]}{1-(1-\alpha)}\right]t_1 + \left[\alpha\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1-(1-\alpha)^j}{1-(1-\alpha)}\right]t_2 =$$

$$= \frac{(1-\alpha)}{k\alpha}[1-(1-\alpha)^k]t_1 + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}[1-(1-\alpha)^j]t_2 = \frac{(1-\alpha)}{k\alpha}[1-(1-\alpha)^k]t_1 + \left\{1-\frac{(1-\alpha)}{k\alpha}[1-(1-\alpha)^k]\right\}t_2,$$

gdzie kilka razy skorzystaliśmy z własności szeregu geometrycznego. Jeśli teraz zakończyliśmy już nasz proces, tzn.

$$k = \frac{M}{m}, \quad \text{czyli } \alpha = \frac{1}{1+k}, \quad \text{co daje } \frac{1-\alpha}{k\alpha} = 1,$$

dostaniemy dla końcowej temperatury wody, początkowo chłodnej, wyrażenie:

$$z = t_1-(t_1-t_2)(1-\alpha)^k = t_1-\Delta t\left[1-\frac{1}{1+k}\right]^k = t_1-\Delta t\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} t_1-\Delta t\cdot\frac{1}{e}.$$

Po zupełnie analogicznych obliczeniach, końcowa temperatura wody początkowo gorącej dana jest przez

$$y = x_k = t_2+\Delta t(1-\alpha)^k = t_2+\Delta t\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} t_2+\Delta t\cdot\frac{1}{e}.$$

Zauważmy, że ponieważ ($e = 2{,}718\ldots$)

$$z-y = \Delta t-\frac{2\Delta t}{e} = \Delta t\left(\frac{e-2}{e}\right) > 0$$

więc rzeczywiście $z > y$ jak pokazano już poprzednio.

Wygodniej może będzie zapisać powyższe końcowe wzory w nieco innej postaci:

$$z = t_2+\Delta t\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} t_2+\Delta t\left(1-\frac{1}{e}\right). \qquad y = t_1-\Delta t\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} t_1-\Delta t\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

gdzie widać od razu, że woda początkowo chłodna (o temperaturze t_2) rzeczywiście ogrzewa się do $z > t_2$, a woda początkowo gorąca oziębia się od t_1 do y.

Ponieważ nie występuje tutaj zupełne odwrócenie temperatur (bo $z < t_1$, a $y > t_2$), więc opisany powyżej proces jest procesem nieodwracalnym.

Weźmy dla przykładu: $t_1 = 100^\circ$, $t_2 = 0^\circ$; wtedy zależność z i y od k ilustruje tabela

k	z_k	y_k
1	50°	50°
2	55,6°	44,4°
3	57,8°	42,2°
∞	63,2°	36,8°

więc $z = 63{,}2^\circ$ jest maksymalną temperaturą, do której w danym przypadku można ogrzać wodę chłodną przy pomocy opisanego w zadaniu postępowania.