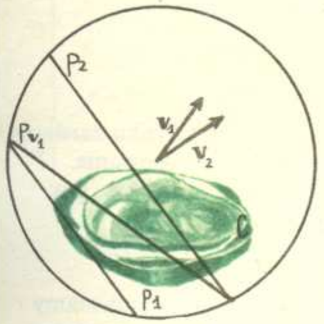
Niech teraz $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ będą dwoma różnymi wektorami jednostkowymi i niech p_{v_1} i p_{v_2} będą płaszczyznami odpowiadającymi im na mocy lematu. Kulę $K(O, R)$, w której leżą zbiory C, M i S zrzutujemy na płaszczyznę wyznaczoną przez wektory $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ (obrazami płaszczyzn p_{v_1} i p_{v_2} będą proste).



p_1 — odcina co najmniej tyle, co p_{v_1}, zaś p_2 — co najwyżej tyle, co p_{v_1}.

Z rysunku łatwo wywnioskować (i nietrudno dokładnie udowodnić), że koło będące przekrojem płaszczyzny p_{v_2} z kulą K leży między płaszczyznami p_1 i p_2 równoległymi do p_{v_1}, a których odległość jest nie większa niż $2R\sin\sphericalangle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$. Wynika stąd, że zbiory $M\cap P_{v_1}^+$ i $M\cap P_{v_2}^+$ różnią się o podzbiory warstwy kuli K pomiędzy płaszczyznami p_1 i p_2 i wobec tego miary $M\cap P_{v_1}^+$ i $M\cap P_{v_2}^+$ różnią się co najwyżej o miarę tej warstwy, mniejszą od $2\pi R^3 \sin\sphericalangle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ (dlaczego?). Jeżeli teraz wektory $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ są bliskie, to $\sin\sphericalangle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ jest mały i mały jest również moduł różnicy $m(\boldsymbol{v}_1)$ i $m(\boldsymbol{v}_2)$, a więc funkcja m jest ciągła. Analogiczne rozważania przekonują nas o ciągłości funkcji s. W poprzednim artykule udowodniliśmy, że dla dwóch dowolnych funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych f_1 i f_2 określonych na sferze dwuwymiarowej istnieje punkt x taki, że $f_1(x) = f_1(-x)$ oraz $f_2(x) = f_2(-x)$. Zastosujmy to twierdzenie do funkcji m i s. Okaże się, że dla pewnego wektora $\boldsymbol{v}$ mamy $m(\boldsymbol{v}) = m(-\boldsymbol{v})$ i $s(\boldsymbol{v}) = s(-\boldsymbol{v})$. Ale wektory $\boldsymbol{v}$ i $-\boldsymbol{v}$ różnią się tylko zwrotem i wobec tego płaszczyzna p_v jest prostopadła do $-\boldsymbol{v}$ i ponieważ na mocy lematu istnieje dokładnie jedna płaszczyzna połowiąca C i prostopadła do danego wektora, więc $p_{-v} = p_v$. Teraz jest już jasne, że $P_{-v}^+ = P_v^-$ i $\mu(M\cap P_v^-) = m(\boldsymbol{v}) = m(-\boldsymbol{v}) = \mu(M\cap P_v^+)$, a więc płaszczyzna p_v połowi zbiór M. Analogicznie sprawdzimy, że połowi ona również S. Można kroić!!

Na zakończenie dwa pytania pod adresem Czytelników:

Czy istnieje podobne twierdzenie „płaskie", tzn. mówiące o podzbiorach płaszczyzny? (Zob. Dwudziesta Czwarta Olimpiada Matematyczna WSiP 1974, str. 42.)

Czy można zastąpić miary zbiorów jakimiś innymi ich funkcjami? (np. średnicami?)

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M **88.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Na zewnątrz niego konstruujemy takie dwa trójkąty ABK i CAL, że $\sphericalangle BKA = \sphericalangle ALC = 90°$, $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CAL = \varphi < 90°$. Niech K' i L' będą rzutami prostokątnymi punktów K i L odpowiednio na boki AB i AC, M zaś takim punktem odcinka BC, że $CM = MB\,\mathrm{tg}^2\varphi$. Udowodnić, że trójkąty $ML'L$, $KK'M$ i KAL są podobne w stosunku $\sin\varphi:\cos\varphi:1$. (Jerzy Mitek)

Rozwiązanie na str. 2

M **89.** W szeregu ustawiono n uczniów ($n \geqslant 2$) ponumerowanych kolejno liczbami od 1 do n. Na daną komendę uczeń może zamienić się miejscem z innym uczniem lub pozostać na miejscu. Czy jest możliwe, by po dwóch komendach uczniowie ustawili się w szeregu tak, by pierwszy uczeń miał numer n, a następnie kolejne numery od 1 do $n-1$?

Rozwiązanie na str. 11

M **90.** Ciąg s_m określony jest dla $m \geqslant 4$ wzorami

$$s_4 = 1,$$

$$s_{m+1} = s_m + 1\cdot(m-2) + 2\cdot(m-3) + \ldots + (m-3)\cdot 2 + (m-2)\cdot 1.$$

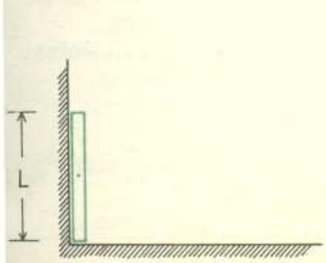
Udowodnić, że $s_m = \binom{m}{4}$.

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F **30.** Jednorodny pręt o długości L stoi pionowo na gładkiej podłodze przy ścianie o gładkiej powierzchni (patrz rysunek). Dolny koniec pręta został delikatnie popchnięty i zaczął swobodnie odsuwać się po płaszczyźnie prostopadłej do ściany.

Pod jakim kątem pręt będzie nachylony do podłogi w momencie, w którym górny koniec pręta oderwie się od ściany?



Rozwiązanie na str. 11