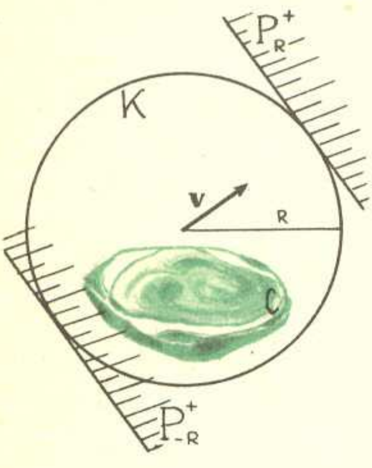
Twierdzenie o kanapkach

Mgr Krzysztof NOWIŃSKI

W poprzednim artykule („Delta" nr 11/1975) zapowiedzieliśmy „gastronomiczne" wnioski z Twierdzenia o Antypodach. Obiecaliśmy mianowicie udowodnić „Twierdzenie o Kanapkach": *Kanapkę z masłem i szynką można przekroić jednym cięciem płaskiego noża połowiąc i chleb i masło i szynkę.*
Nie możemy, niestety, prowadzić ścisłego dowodu na podstawie tak niematematycznych sformułowań. Trzeba więc nasze twierdzenie napisać bardziej „naukowo". Będzie ono brzmiało tak:

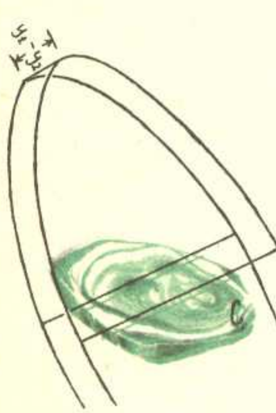
Zbiór otwarty — taki, do którego każdy punkt należy wraz z pewnym swym otoczeniem (kulą o środku w tym punkcie).
Zbiór otwarty w przestrzeni trójwymiarowej jest spójny, jeśli każde dwa jego punkty można połączyć łamaną zawartą w tym zbiorze. (Zbiór spójny odgrywa rolę kromki chleba; masło i szynka mogą być niespójne.)
Jeśli A jest zbiorem otwartym ograniczonym, to można mu przyporządkować *miarę* $\mu(A)$, która jest uogólnieniem objętości. Można sobie wyobrażać, że zbiory C, M, S są na tyle „porządne", że mają objętość i przez $\mu(C)$, $\mu(M)$, $\mu(S)$ rozumieć objętości.

Niech C, M i S będą zbiorami otwartymi zawartymi w pewnej kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R. Niech ponadto jeden z nich (np. C) będzie spójny. Przy tych założeniach istnieje płaszczyzna p dzieląca przestrzeń na dwie półprzestrzenie P^+ i P^- takie, że: $\mu(C\cap P^+) = \mu(C\cap P^-)$, $\mu(M\cap P^+) = \mu(M\cap P^-)$ oraz $\mu(S\cap P^+) = \mu(S\cap P^-)$, co właśnie oznacza, że płaszczyzna p połowi C, M i S.
A oto idea dowodu: Niech $\boldsymbol{v}$ będzie wektorem o długości 1. Możemy go utożsamiać z punktem ze sfery jednostkowej (dlaczego?). Oznaczmy przez p_v płaszczyznę prostopadłą do $\boldsymbol{v}$ i połowiącą zbiór C (jej istnienie i jednoznaczność trzeba będzie oczywiście udowodnić). Niech P_v^+ będzie półprzestrzenią wyznaczoną przez p_v rozciągającą się w kierunku wektora $\boldsymbol{v}$. W drugim kroku dowodu pokażemy, że miary przecięć zbiorów M i S z półprzestrzenią P_v^+ (będziemy je oznaczać odpowiednio $m(\boldsymbol{v})$ i $s(\boldsymbol{v})$) są ciągłymi funkcjami wektora $\boldsymbol{v}$. Gdy teraz przypomnimy sobie jeden z wariantów Twierdzenia o Antypodach, okaże się, że istnieje wektor $\boldsymbol{v}_0$ taki, że $m(\boldsymbol{v}_0) = m(-\boldsymbol{v}_0)$ oraz $s(\boldsymbol{v}_0) = s(-\boldsymbol{v}_0)$. Jeżeli teraz zauważymy, że $p_v = p_{-v}$, a ponadto $p_v^+ = p_{-v}^-$, to okaże się, że p_{v_0} jest poszukiwaną płaszczyzną.



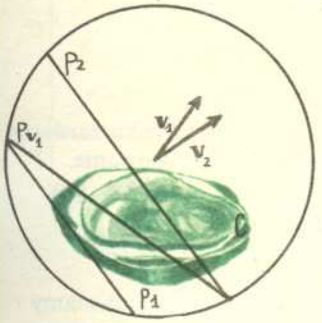
Zanim przystąpimy do realizacji tego programu działania, przypomnijmy kilka prostych faktów z geometrii analitycznej. Jak wiadomo, równanie płaszczyzny p prostopadłej do wektora $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ma postać $v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 = y$, przy czym jeśli $\boldsymbol{v}$ jest wektorem jednostkowym, to y jest odległością p od początku układu współrzędnych O (braną ze znakiem „$-$" gdy $O \in P_v^+$). Półprzestrzenie P_v^+ i P_v^- są wyznaczane odpowiednio przez nierówności $v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 > y$ oraz $v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 < y$.
Przypomnijmy ponadto potrzebne nam w dowodzie fakty z teorii miary:
1. Każdy zbiór otwarty i ograniczony ma miarę.
2. Miara sumy zbiorów jest mniejsza lub równa sumie ich miar, przy czym jeśli zbiory te są rozłączne, to zachodzi równość. Wynika stąd
3. Jeżeli $A \subset B$, to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Możemy teraz zacząć realizację kolejnych kroków naszego programu działania. Pierwszym krokiem będzie dowód
Lematu.
Niech C będzie zbiorem otwartym i spójnym zawartym w kuli K o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R. Przy tych założeniach dla każdego wektora jednostkowego $\boldsymbol{v}$ istnieje dokładnie jedna płaszczyzna p prostopadła do $\boldsymbol{v}$ i połowiąca zbiór C.



Dla dowodu rozpatrzmy funkcję $h(y)$ określoną na odbinku $\langle -R, R\rangle$ i przypisującą zmiennej y miarę przecięcia zbioru C z półprzestrzenią P_y^+ położoną „powyżej" płaszczyzny o równaniu $v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 = y$. Półprzestrzenie P_R^+ i P_{-R}^+ wyglądają tak jak na rysunku i jak łatwo zauważyć $h(-R) = \mu(C)$, natomiast $h(R) = 0$. Jeżeli teraz $y_1 < y_2$, to $h(y_1) \geqslant h(y_2)$, ponieważ $C\cap P_{y_1}^+ \supset C\cap P_{y_2}^+$. Równocześnie $h(y_1)-h(y_2)$ jest miarą części zbioru C zawartej między płaszczyznami p_{y_1} i p_{y_2}. Zbiór ten jest zawarty w walcu o promieniu R i wysokości y_2-y_1. Wobec tego $h(y_1)-h(y_2) \leqslant \pi R^2(y_2-y_1)$, skąd już łatwo wynika ciągłość funkcji h. Jeżeli teraz przypomnimy sobie *twierdzenie Darboux*, to łatwo zauważymy, że dla pewnej wartości y_0 funkcja h przybiera wartość $\frac{\mu(C)}{2}$ i wobec tego płaszczyzna p_{y_0} połowi C. Jeżeli teraz $y \neq y_0$ np. $y > y_0$, to z założenia otwartości i spójności zbioru C wynika, że między płaszczyznami p_y i p_{y_0} leży podzbiór C otwarty i niepusty, więc o mierze niezerowej, wobec czego $h(y) \neq h(y_0)$. Wynika stąd, że y_0 jest jedyną wartością spełniającą warunki lematu.

Tw. Darboux: Jeśli funkcja ciągła na przedziale $\langle -a, b\rangle$ przyjmuje wartości m i M ($m < M$), to przyjmuje wszystkie wartości zawarte pomiędzy m i M, w szczególności przyjmuje wartość $\frac{1}{2}(M+m)$. (Funkcja h jest ciągła na $\langle -R, R\rangle$ i przyjmuje zarówno wartość zero, jak i wartość $\mu(C)$).



p_1 — odcina co najmniej tyle, co p_{v_1}, zaś p_2 — co najwyżej tyle, co p_{v_1}.

Niech teraz $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ będą dwoma różnymi wektorami jednostkowymi i niech p_{v_1} i p_{v_2} będą płaszczyznami odpowiadającymi im na mocy lematu. Kulę $K(O, R)$, w której leżą zbiory C, M i S zrzutujemy na płaszczyznę wyznaczoną przez wektory $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ (obrazami płaszczyzn p_{v_1} i p_{v_2} będą proste).
Z rysunku łatwo wywnioskować (i nietrudno dokładnie udowodnić), że koło będące przekrojem płaszczyzny p_{v_2} z kulą K leży między płaszczyznami p_1 i p_2 równoległymi do p_{v_1}, a których odległość jest nie większa niż $2R \sin \sphericalangle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$. Wynika stąd, że zbiory $M \cap P_{v_1}^+$ i $M \cap P_{v_2}^+$ różnią się o podzbiory warstwy kuli K pomiędzy płaszczyznami p_1 i p_2 i wobec tego miary $M \cap P_{v_1}^+$ i $M \cap P_{v_2}^+$ różnią się co najwyżej o miarę tej warstwy, mniejszą od $2\pi R^3 \sin \sphericalangle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ (dlaczego?). Jeżeli teraz wektory $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ są bliskie, to $\sin \sphericalangle(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ jest mały i mały jest również moduł różnicy $m(\boldsymbol{v}_1)$ i $m(\boldsymbol{v}_2)$, a więc funkcja m jest ciągła. Analogiczne rozważania przekonują nas o ciągłości funkcji s. W poprzednim artykule udowodniliśmy, że dla dwóch dowolnych funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych f_1 i f_2 określonych na sferze dwuwymiarowej istnieje punkt x taki, że $f_1(x) = f_1(-x)$ oraz $f_2(x) = f_2(-x)$. Zastosujmy to twierdzenie do funkcji m i s. Okaże się, że dla pewnego wektora $\boldsymbol{v}$ mamy $m(\boldsymbol{v}) = m(-\boldsymbol{v})$ i $s(\boldsymbol{v}) = s(-\boldsymbol{v})$. Ale wektory $\boldsymbol{v}$ i $-\boldsymbol{v}$ różnią się tylko zwrotem i wobec tego płaszczyzna p_v jest prostopadła do $-\boldsymbol{v}$ i ponieważ na mocy lematu istnieje dokładnie jedna płaszczyzna połowiąca C i prostopadła do danego wektora, więc $p_{-v} = p_v$. Teraz jest już jasne, że $P_{-v}^+ = P_v^-$ i $\mu(M \cap P_v^-) = m(\boldsymbol{v}) = m(-\boldsymbol{v}) = \mu(M \cap P_v^+)$, a więc płaszczyzna p_v połowi zbiór M. Analogicznie sprawdzimy, że połowi ona również S. Można kroić!!
Na zakończenie dwa pytania pod adresem Czytelników:
Czy istnieje podobne twierdzenie „płaskie", tzn. mówiące o podzbiorach płaszczyzny? (Zob. Dwudziesta Czwarta Olimpiada Matematyczna WSiP 1974, str. 42.)
Czy można zastąpić miary zbiorów jakimiś innymi ich funkcjami? (np. średnicami?)

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 88. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Na zewnątrz niego konstruujemy takie dwa trójkąty ABK i CAL, że $\sphericalangle BKA = \sphericalangle ALC = 90°$, $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CAL = \varphi < 90°$. Niech K' i L' będą rzutami prostokątnymi punktów K i L odpowiednio na boki AB i AC, M zaś takim punktem odcinka BC, że $CM = MB\,\mathrm{tg}^2\varphi$. Udowodnić, że trójkąty $ML'L$, $KK'M$ i KAL są podobne w stosunku $\sin\varphi : \cos\varphi : 1$. (Jerzy Mitek)
Rozwiązanie na str. 2

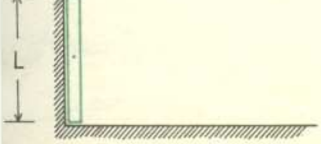
M 89. W szeregu ustawiono n uczniów ($n \geqslant 2$) ponumerowanych kolejno liczbami od 1 do n. Na daną komendę uczeń może zamienić się miejscem z innym uczniem lub pozostać na miejscu. Czy jest możliwe, by po dwóch komendach uczniowie ustawili się w szeregu tak, by pierwszy uczeń miał numer n, a następnie kolejne numery od 1 do $n-1$?
Rozwiązanie na str. 11

M 90. Ciąg s_m określony jest dla $m \geqslant 4$ wzorami

$$s_4 = 1,$$
$$s_{m+1} = s_m + 1 \cdot (m-2) + 2 \cdot (m-3) + \ldots + (m-3) \cdot 2 + (m-2) \cdot 1.$$

Udowodnić, że $s_m = \binom{m}{4}$.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI



F 30. Jednorodny pręt o długości L stoi pionowo na gładkiej podłodze przy ścianie o gładkiej powierzchni (patrz rysunek). Dolny koniec pręta został delikatnie popchnięty i zaczął swobodnie odsuwać się po płaszczyźnie prostopadłej do ściany.
Pod jakim kątem pręt będzie nachylony do podłogi w momencie, w którym górny koniec pręta oderwie się od ściany?
Rozwiązanie na str. 11