Dr Maciej BRYŃSKI

Z konstrukcjami geometrycznymi spotykamy się niemal na każdym kroku zarówno w samej geometrii, jak i wszędzie tam, gdzie geometria znajduje zastosowanie. Można skonstruować środek danego odcinka, można skonstruować trójkąt, gdy dane są jego trzy boki, albo gdy dane są dwa boki i kąt między nimi itp.

A czego nie można skonstruować? O odpowiedź na to pytanie nieco trudniej. Spróbujemy jednak znaleźć tę odpowiedź. Musimy w tym celu dokładnie sprecyzować, co będziemy rozumieli przez konstrukcję geometryczną. Umawiamy się, że mamy do dyspozycji cyrkiel i linijkę. Za pomocą tych przyrządów możemy wykonywać następujące czynności:

a) prowadzić prostą przez dane dwa punkty;

b) wykreślać okrąg o środku w danym punkcie i o promieniu równym odległości dwóch danych punktów;

c) wyznaczać punkty przecięcia tak wykreślonych prostych i okręgów.

W wyniku wielokrotnego stosowania tych czynności otrzymujemy na płaszczyźnie coraz to nowe punkty, które uznajemy za punkty konstruowalne. Przestrzegamy przy tym surowo umowy, że wolno wykonywać tylko czynności a), b) lub c), nie wolno więc np. dla wykreślenia prostych równoległych wykorzystać faktu, że dwie krawędzie linijki pozwoliłyby na narysowanie pewnej pary prostych równoległych.

Problem, który nas interesuje, brzmi następująco: Dane są punkty $P_1, P_2, \ldots, P_n$ płaszczyzny. Czy dowolny punkt płaszczyzny możemy uzyskać w wyniku czynności a), b), c) stosowanych początkowo do danych punktów, a następnie do punktów danych i otrzymanych w wyniku już zastosowanych czynności a), b), c)?

Odpowiedź jest negatywna. Postaramy się znaleźć kryterium pozwalające ocenić, jakie punkty można skonstruować. W tym celu rozważmy na płaszczyźnie układ współrzędnych, przy czym dla wygody przyjmijmy, że wśród punktów danych znajdują się punkty (0,0) i (1,0). Dla dalszych rozważań potrzebne nam będzie pojęcie ciała liczbowego. Ciałem liczbowym nazywamy taki niepusty zbiór liczb, że wynik każdego z czterech działań arytmetycznych: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia (z wyjątkiem dzielenia przez 0) wykonanych na elementach tego zbioru również jest elementem tego zbioru. Ciałami liczbowymi są na przykład: zbiór liczb wymiernych, zbiór liczb rzeczywistych, zbiór liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdzie a, b są wymierne itp. Nie są natomiast ciałami: zbiór liczb całkowitych, zbiór liczb niewymiernych itp. (Czytelnik z pewnością bez trudu uzasadni powyższe stwierdzenia.)

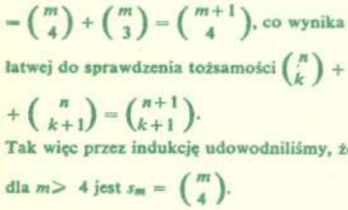
Powróćmy do płaszczyzny z przyjętym układem współrzędnych i danymi punktami, wśród których są (0,0) i (1,0). Niech K będzie najmniejszym ciałem liczbowym zawierającym współrzędne wszystkich danych punktów. Okazuje się, że wśród punktów, które można skonstruować z danych punktów, są wszystkie te punkty płaszczyzny, których współrzędne należą do ciała K. W ten sposób nie wyczerpiemy jednak wszystkich punktów, które można skonstruować. To ostatnie zdanie uzasadnimy rozważając następujący przykład.

Przypuśćmy, że dane są tylko $P_0 = (0,0)$ i $P_1 = (1,0)$. Wtedy ciało K jest ciałem liczb wymiernych. Jak skonstruować punkt, którego współrzędne są ustalonymi z góry liczbami wymiernymi? Wystarczy skonstruować każdą z tych współrzędnych na odpowiedniej osi. Mamy więc skonstruować odcinek, którego długość równa jest ustalonej liczbie wymiernej dodatniej (liczbie ujemnej x odpowiada punkt osi liczbowej leżący symetrycznie względem początku układu do punktu odpowiadającego liczbie dodatniej $-x$). O ile ta liczba wymierna jest liczbą naturalną m, to konstrukcja polega na odłożeniu na osi m-krotnie odcinka P_0P_1.

Dla liczby m/n postępujemy jak następuje: na pierwszej osi współrzędnych odkładamy punkty P_1 i P_m odpowiadające liczbom 1 i m, rysujemy inną dowolną prostą przechodzącą przez początek układu P_0 i odkładamy na niej kolejno n równych odcinków, z których pierwszy ma początek w P_0.

Łączymy koniec tego n-tego odcinka z punktem P_m, a następnie do poprowadzonego tak odcinka rysujemy prostą równoległą przechodzącą przez P_1 (prowadzenie równoległych jest oczywiście konstrukcyjnie wykonalne).

Z twierdzenia Talesa wynika, że poprowadzona tak prosta przetnie pierwszą oś współrzędnych w punkcie odległym od P_0 właśnie o m/n.



Rozwiązanie zadania M90.

Drugi z wzorów definiujących ciąg (s_m) możemy zapisać w postaci $s_{m+1} = s_m + \sum_{k=1}^{m-2} k(m-k-1)$, a więc (piszemy $\sum$ zamiast $\sum_{k=1}^{m-2}$)

$$s_{m+1} = s_m + \sum km - \sum k(k+1) = s_m + m\sum k - \sum k^2 - \sum k = s_m + (m-1)\sum k - \sum k^2.$$

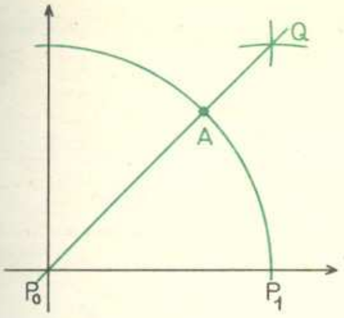
Ponieważ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

więc
$$s_{m+1} = s_m + \frac{1}{2}(m-1)^2(m-2) - \frac{1}{6}(m-2)(m-1)(2m-3) = s_m + \frac{1}{6}(m-1)(m-2)(3m-3-2m+3) = s_m + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2) = s_m + \binom{m}{3}.$$

Zauważmy, że $s_3 = 1 = \binom{4}{4}$.

Załóżmy, że dla pewnego $m > 4$ jest $s_m = \binom{m}{4}$. Wówczas $s_{m+1} = s_m + \binom{m}{3} = \binom{m}{4} + \binom{m}{3} = \binom{m+1}{4}$, co wynika z łatwej do sprawdzenia tożsamości $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Tak więc przez indukcję udowodniliśmy, że dla $m > 4$ jest $s_m = \binom{m}{4}$.



Wskażemy teraz punkt, który można skonstruować przy danych tylko punktach $P_0 = (0,0)$ i $P_1 = (1,0)$, choć jego współrzędne nie będą liczbami wymiernymi. Rozważmy mianowicie punkty przecięcia okręgu o środku w punkcie P_0 i promieniu 1 i prostej przechodzącej przez punkty $P_0 = (0,0)$ i $Q = (1,1)$. Otrzymamy równania tych linii

$$x^2+y^2 = 1,$$

$$x-y = 0,$$

z których wynika, że punktami przecięcia są $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Okazuje się, że wyznaczenie współrzędnych punktów uzyskanych w wyniku konstrukcji, to jest będących punktami przecięcia dwóch prostych lub prostej i okręgu lub dwóch okręgów, sprowadza się do rozwiązywania równań liniowych lub kwadratowych. Wynika stąd, że jeśli np. choć jedna współrzędna interesującego nas punktu jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 3 nierozkładalnego na czynniki stopnia niższego nad ciałem K, to punktu tego skonstruować nie można. Podobny wniosek otrzymuje się dla przypadku, gdy choć jedna współrzędna takiego punktu jest liczbą przestępną nad K, tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego niezerowego wielomianu o współczynnikach z K. Te wyniki pozwalają odpowiedzieć na pytania, które postawili starożytni Grecy.

Chodzi tu o tak zwane konstrukcje platońskie.

1. *Kwadratura koła.* Problem polega na tym, czy można skonstruować kwadrat o polu równym polu danego koła. Odpowiedź jest negatywna, gdyż w przypadku, gdy promień danego koła wynosi 1, pole tego koła wynosi, jak wiadomo, π, a więc bok poszukiwanego kwadratu miałby długość $\sqrt{\pi}$. Dla rozwiązania zadania należałoby więc skonstruować punkt $(\pi, 0)$. Okazuje się jednak, że liczba $\sqrt{\pi}$ jest przestępna nad ciałem liczb wymiernych, które w tym przypadku jest najmniejszym ciałem liczbowym zawierającym dane. Oznacza to, że nie można metodami konstrukcyjnymi zbudować kwadratu, którego pole równa się polu koła o promieniu 1.

2. *Podwojenie sześcianu.* Zadanie to polega na zbudowaniu sześcianu o objętości dwukrotnie większej od objętości danego sześcianu. Ewentualne wykonanie tego zadania polegałoby na zbudowaniu krawędzi takiego sześcianu. Jeśli dany sześcian ma krawędź długości 1, to długość poszukiwanej krawędzi nowego sześcianu wynosi $\sqrt[3]{2}$. Musielibyśmy więc zbudować punkt $(\sqrt[3]{2}, 0)$. Konstrukcji tej wykonać nie można, bo liczba $\sqrt[3]{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu x^3-2 i nie można jej otrzymać przez rozwiązywanie równań kwadratowych.

3. *Trysekcja kąta.* To zadanie polega na konstrukcyjnym podziale danego kąta na trzy równe części. Zauważmy najpierw, że dla pewnych kątów konstrukcję tę można wykonać bardzo łatwo; Czytelnik z pewnością potrafi zbudować trzecią część kąta prostego (proszę dokładnie opisać konstrukcję!).

Pokażemy, że na przykład kąta 60° nie można konstrukcyjnie podzielić na 3 równe części. W tym celu zauważmy, że można skonstruować kąt φ wtedy i tylko wtedy, gdy można skonstruować punkt $(\cos\varphi, 0)$. Ze wzoru

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi + 3\cos\varphi$$

zastosowanego do $\varphi = 20°$ otrzymamy:

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°,$$

więc

$$4\cos^3 20° - 3\cos 20° = \frac{1}{2},$$

co oznacza, że cos 20° jest pierwiastkiem wielomianu

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$

Wielomian ten, jak nietrudno się przekonać, nie ma pierwiastka wymiernego, skąd wynika, że żaden jego pierwiastek nie może być otrzymany przez rozwiązywanie tylko równań kwadratowych. Oznacza to, że kąta 20° nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.

(Proponujemy Czytelnikom porównanie powyższych rezultatów z zadaniem **M22**, **Delta 8, 1974**)