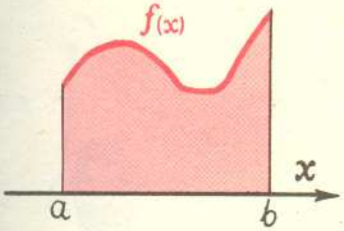
Uniwersalny domowy integrator beztranzystorowy produkcji ZTS

Planimetr model **UDBT 1**

Instrukcja obsługi

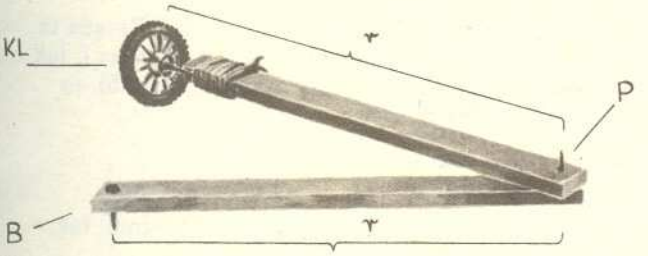
Informacje ogólne. Skonstruowany przez inżynierów ZTS Uniwersalny domowy Integrator Beztanzystorowy inaczej zwany Planimetrem UDBT 1 jest prostą w obsłudze maszyną analogową służącą do pomiaru pól figur płaskich ograniczonych krzywymi zamkniętymi. Pamiętając o tym, że $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ jest polem figury zawartej między osią x-ów a wykresem funkcji $f(x)$ (por. rys. 1) możemy używać planimetru do numerycznego obliczania całek (tzn. do całkowania). Ze względu na swą wyjątkowo przystępną cenę Planimetr UDBT 1 jest w zasadzie dostępny dla każdego.



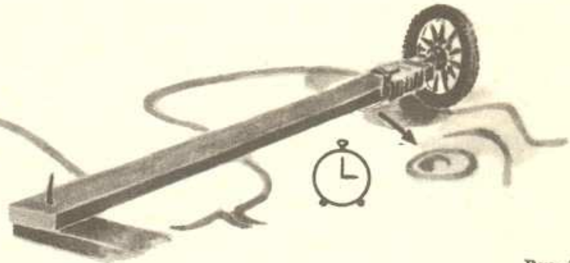
Rys 1

Budowa Planimetru UDBT1. Planimetr UDBT 1 składa się z dwóch ramion o długości r połączonych przegubem P oraz bieguna B i kółka liczącego KL umocowanego prostopadle do ramienia (rys. 2). Kółko liczące może obracać się swobodnie dokoła swojej osi.

Posługiwanie się Planimetrem UDBT 1. Aby zmierzyć pole figury $\mathscr{F}$ ograniczonej krzywą $\mathscr{L}$ wbijamy biegun B w dowolnym miejscu, tak jednak, by cała figura $\mathscr{F}$ znalazła się w zasięgu ramion planimetru, oraz umieszczamy kółko liczące w dowolnym punkcie krzywej $\mathscr{L}$ (rys. 3). Następnie nie zmieniając położenia bieguna B, suwamy kółkiem wzdłuż krzywej $\mathscr{L}$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, tak by po przejściu całej krzywej $\mathscr{L}$ wrócić do punktu wyjścia.



Rys 2: Planimetr UDBT1; r-ramiona, P — przegub, B — biegun, KL — kółko liczące



Rys. 3

Odczytywanie wskazań kółka liczącego. W trakcie suwania kółka liczącego wzdłuż krzywej, obraca się ono raz w jedną raz w drugą stronę. Obroty kółka w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara należy liczyć ze znakiem plus, a obroty w stronę przeciwną — ze znakiem minus (rys. 4). Odczytanie wskazań kółka liczącego polega na obliczeniu wielkości

$$W = O_+ - O_-,$$

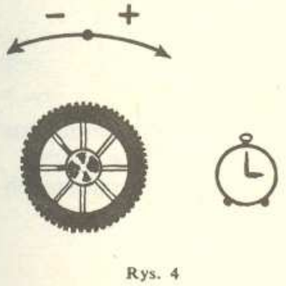
gdzie O_+ jest ilością obrotów kółka w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (tzn. dodatnim), a O_- jest ilością obrotów w kierunku przeciwnym (tzn. ujemnym). W praktyce najłatwiej jest liczyć o ile więcej było obrotów w kierunku dodatnim niż w kierunku ujemnym.

Uwaga. Wielkość W jest zawsze dodatnia!

Dokonywanie pomiarów pól. Pole figury $\mathscr{F}$ obliczamy ze wzoru planimetru:

$$\text{Pole } \mathscr{F} = W \cdot r \cdot d,$$

gdzie r jest długością ramienia planimetru, a d jest obwodem kółka liczącego.



Rys. 4

Przykład. Podczas pomiaru pola pewnej figury $\mathscr{F}$ planimetrem o ramieniu 15 cm i obwodzie kółka liczącego 3 cm, kółko liczące obróciło się najpierw w kierunku ujemnym o $2\frac{2}{3}$ obrotu, następnie o $4\frac{1}{2}$ w kierunku dodatnim, a na końcu o $\frac{1}{4}$ w kierunku ujemnym.

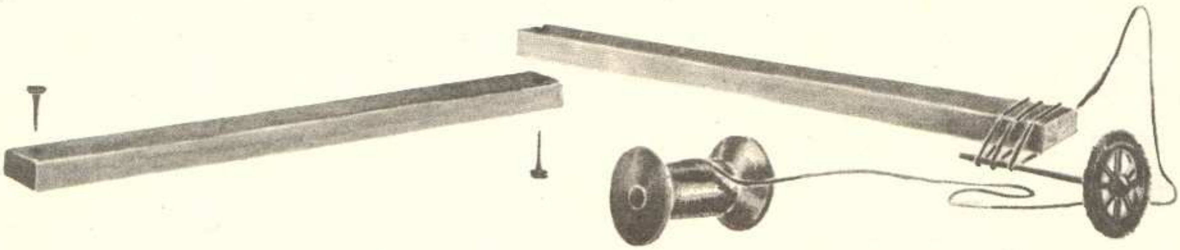
Zatem $W = -2\frac{2}{3} + 4\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1\frac{7}{12}$. Ze Wzoru Planimetru

$$\text{Pole } \mathscr{F} = 1\frac{7}{12} \cdot 15\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 66\frac{1}{4}\text{ cm}^2.$$

Doc. dr Piotr MANKIEWICZ

Po przeczytaniu powyższej Instrukcji Obsługi, Czytelnik może zacząć podejrzewać tu jakieś oszustwo. Od biedy można się zgodzić, że możliwy jest przyrząd mierzący pole dowolnych figur płaskich. Stanisław Lem nazwałby taki przyrząd Uniwersalnym Integratorem. Ale żeby był on (przyrząd, nie Lem) tak zupełnie pozbawiony tranzystorów?

Taki Uniwersalny Integrator istnieje jednakże naprawdę i nazywa się planimetrem. Co więcej, każdy może stać się posiadaczem planimetru, znaną od wielu pokoleń metodą **Zrób To Sam.** W tym celu wystarczy zaopatrzyć się w dwie cienkie listewki równej długości, dwa małe gwoździki, kółko obracające się swobodnie na ośce, oraz kawałek nitki, a następnie złożyć to wszystko razem tak jak to pokazano na rysunku 5. Aby ułatwić sobie odczytywanie ułamków obrotów kółka liczącego można podzielić obwód kółka kolorowymi flamastrami na kilka (np. 8) równych sektorów. Przyjemnych pomiarów.



Rys. 5

Uwaga. W handlu dostępne są planimetry typu profesjonalnego (drogie) o dużym stopniu precyzji pomiaru i nieco innej konstrukcji. Zdjęcie takiego profesjonalnego planimetru można obejrzeć na okładce.

Dla tych wszystkich, którym nie wystarcza świadomość istnienia planimetru i chcieliby jeszcze zrozumieć jak on działa, zamieszczamy

TEORIĘ PLANIMETRU

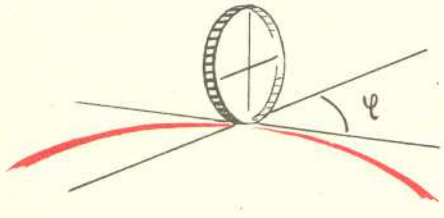
Działanie planimetru oparte jest na *zasadzie „ślizgającego się kółka"*. Zasada ta stwierdza, że jeżeli kółko będziemy posuwać wzdłuż krzywej $\mathscr{L}$ o długości l, tak by kąt pomiędzy płaszczyzną kółka a krzywą $\mathscr{L}$ był stale równy φ (rys. 6), to kółko obróci się tak jak by było toczone po drodze

$$D = l\cos\varphi.$$

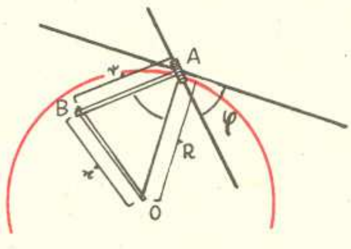
W dalszym ciągu będziemy mówili, że:

— kółko obróciło się o $a\,(a > 0)$, jeżeli obróciło się w kierunku dodatnim tak, jakby było toczone po drodze długości a,

— kółko obróciło się o $-a$, jeżeli obróciło się w kierunku ujemnym tak, jakby było toczone po drodze o długości a.



Rys. 6



Rys. 7

Jeżeli teraz $\mathscr{F}$ jest kołem o promieniu R i środku O i jeżeli biegun planimetru umieścimy w punkcie O (rys. 7), to łatwo można zauważyć, że kąt φ między płaszczyzną kółka a okręgiem będzie równy $\sphericalangle OAB$ (twierdzenie o ramionach kąta przeciętych prostopadłymi), a zatem

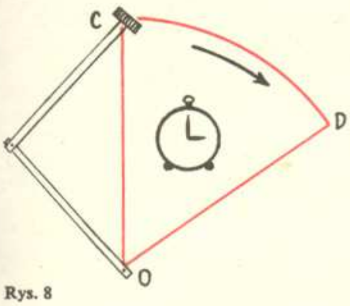
$$\cos\varphi = \frac{\frac{R}{2}}{r} = \frac{R}{2r}.$$

W związku z tym, zgodnie z zasadą „ślizgającego się kółka", jeżeli będziemy suwać kółkiem liczącym planimetru wzdłuż okręgu tak, by wrócić do punktu wyjścia, to kółko obróci się o

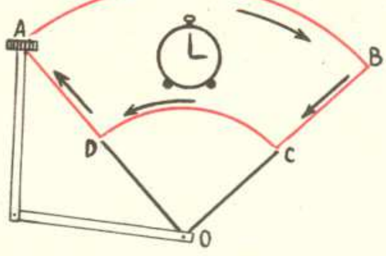
$$W = 2\pi R\cdot\cos\varphi = 2\pi R\cdot\frac{R}{2r} = \frac{\pi R^2}{r},$$

czyli o pole koła podzielone przez długość ramienia planimetru.

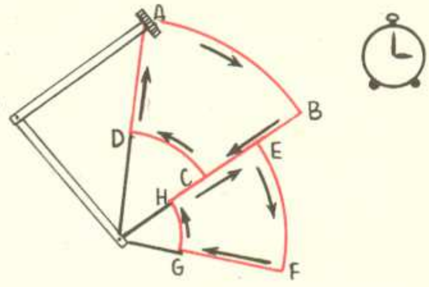
Wniosek. Jeżeli w takiej sytuacji będziemy suwać kółkiem liczącym wzdłuż pewnego łuku CD tego okręgu (rys. 8), to kółko obróci się o pole wycinka kołowego COD podzielone przez r.
Jeżeli mamy do czynienia z wycinkiem pierścienia kołowego $ABCD$ (rys. 9), to z Wniosku wynika, że kółko suwając się od A do B obróci się o S_1/r, gdzie S_1



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

jest polem wycinka kołowego AOB. Następnie kółko suwając się od B do C obróci się o pewną wielkość x, a dalej, na drodze od C do D, o $-S_2/r$ (będzie się ono obracało w stronę ujemną), gdzie S_2 jest polem wycinka COD. W końcu na drodze od D do A kółko obróci się dokładnie o tyle samo, co na drodze od B do C, tyle, że w przeciwną stronę, tzn. obróci się o $-x$. W sumie kółko obróci się o

$$W = \frac{S_1}{r} + x - \frac{S_2}{r} - x = \frac{S_1 - S_2}{r},$$

czyli obróci się o pole wycinka $ABCD$ podzielone przez r. Rozważmy teraz figurę $\mathscr{F}$ będącą sumą dwu wycinków pierścieni kołowych o wspólnym środku O (rys. 10). Jeżeli będziemy suwać kółko planimetru kolejno wzdłuż brzegu jednego wycinka pierścienia, a następnie wzdłuż brzegu drugiego wycinka, to na mocy poprzedniego wzoru obróci się ono o

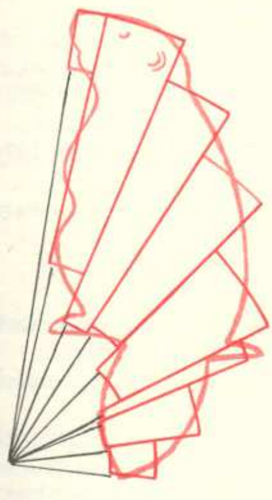
$$W = \frac{\text{pole pierwszego wycinka}}{r} + \frac{\text{pole drugiego wycinka}}{r} = \frac{\text{pole } \mathscr{F}}{r}.$$

Z drugiej strony, łatwo można zauważyć, że w tym wypadku kółko obróci się dokładnie o tyle samo, co w przypadku, gdyby było suwane po drodze $ABEFGHCDA$ (czyli po obwodzie figury $\mathscr{F}$), oraz dodatkowo od C do E i od E do C. Ponieważ od E do C kółko obróci się dokładnie o tyle samo, co od C do E, tyle, że w przeciwną stronę, otrzymujemy, że kółko suwane po obwodzie figury $\mathscr{F}$ obróci się o W. Na mocy poprzedniego wzoru

$$W = \frac{\text{pole} \mathscr{F}}{r}.$$

Rozumowanie to można uogólnić na figury będące sumą dowolnej skończonej ilości takich wycinków pierścieni kołowych o wspólnym środku. Otrzymamy wtedy
Twierdzenie. *Jeżeli $\mathscr{F}$ jest sumą skończonej ilości wycinków pierścieni kołowych o środku O i jeżeli biegun planimetru jest umieszczony w punkcie O, to kółko liczące planimetru suwane wzdłuż obwodu figury $\mathscr{F}$ obróci się o*

$$W = \frac{\text{pole } \mathscr{F}}{\text{długość ramienia planimetru}}.$$



Rys. 11

Ponieważ każdą figurę ograniczoną krzywą zamkniętą można „przybliżyć" sumą takich koncentrycznych wycinków pierścieni kołowych (rys. 11), więc, dokonując tzw. przejścia granicznego, możemy wywnioskować następującą zasadę pozwalającą mierzyć planimetrem pola dowolnych figur płaskich:
Zasada planimetru. Jeżeli $\mathscr{F}$ jest figurą płaską ograniczoną krzywą zamkniętą $\mathscr{L}$ i jeżeli biegun planimetru umieścimy w dowolnym punkcie płaszczyzny, to kółko liczące planimetru suwane wzdłuż krzywej $\mathscr{L}$ tak, jak to opisano w instrukcji „Posługiwanie się planimetrem" obróci się tak (por. „Odczytywanie wskazań kółka liczącego"), jakby było toczone po drodze równej polu figury $\mathscr{F}$ podzielonemu przez długość ramienia planimetru.

Z Zasady Planimetru, przyjmując, że obwód kółka liczącego wynosi d, a długość ramienia r, otrzymujemy Wzór Planimetru, o którym była mowa w Instrukcji Obsługi:

$$\text{Pole } \mathscr{F} = \text{liczba obrotów kółka liczącego} \cdot r \cdot d.$$