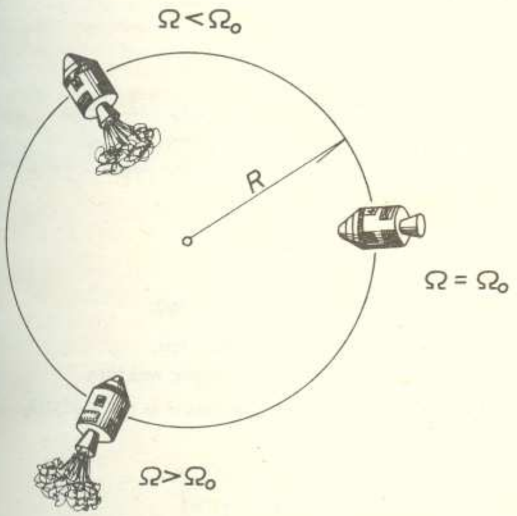
O paradoksie przyspieszeń

„W obliczeniach był błąd."
Stanisław Lem, Eden.

Dr Marek Artur ABRAMOWICZ

W tym artykule chcę przedstawić pewien paradoksalny wniosek wynikający z ogólnej teorii względności. Na jego trop wpadliśmy przypadkowo. Dwa lata temu pracowaliśmy wspólnie z Piotrem Lasotą i Bożeną Muchotrzeb (wówczas jeszcze studentką fizyki) nad problemem dotyczącym istnienia rozwiązania równań Einsteina opisujących pewne obracające się ciało. Pewnego dnia Bożena przyniosła nam wyniki rachunków, nad którymi siedziała całą noc. We wzorach powtarzała się stale liczba $2\sqrt{3}/27$. „To nie może być dobrze — powiedział jeden z nas żartem — takie liczby jak $2\sqrt{3}/27$ nie mogą się pojawiać w rozsądnych teoriach".
Próbowaliśmy obalić wyniki Bożeny wymyślając różne ich konsekwencje i szukając wśród nich zupełnie bezsensownych. W ten sposób odkryliśmy paradoks przyspieszeń i uznaliśmy na jego podstawie, że w rachunkach *jest* błąd. Jednak po dalszych rachunkach i dłuższym namyśle przekonaliśmy się, że paradoks przyspieszeń można wytłumaczyć. Wytłumaczenie to znajdziecie dalej.

Najzabawniejszym momentem tej historii jest to, że Bożena istotnie popełniła błąd w rachunkach — gdyby nie on, nie odkrylibyśmy prawdopodobnie nigdy tego paradoksu.



Rys. 1

Ciało poruszające się po okręgu ze stałą szybkością ma w układzie inercjalnym przyspieszenie dośrodkowe $R\Omega^2$. W układach nieinercjalnych otrzymujemy inne wartości przyspieszenia. I tak np. gdy ze środka okręgu śledzimy wzrokiem ciało kręcące się z prędkością kątową Ω, to nie postrzegamy żadnego ruchu tego ciała — w takim układzie odniesienia przyspieszenie (i prędkość) jest równe zeru (przyp. red.).

A oto paradoks:

Wyobraźmy sobie wiele statków kosmicznych, krążących z różnymi, ustalonymi prędkościami kątowymi $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ po pewnej orbicie kołowej wokół planety o masie M. Jeżeli promień orbity wynosi R, to przyspieszenia nadawane przez siłę ciężkości są równe dla wszystkich statków i wynoszą GM/R^2 (przez G oznaczyliśmy stałą grawitacji). Tymczasem statki poruszające się po tej orbicie z prędkościami kątowymi $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ muszą mieć przyspieszenie dośrodkowe wynoszące $R\Omega_1^2, R\Omega_2^2, R\Omega_3^2, \ldots$. Statek, którego prędkość kątowa równa jest

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

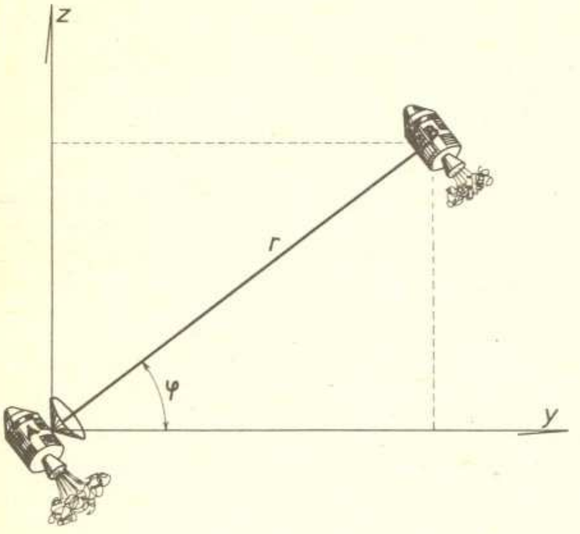
porusza się ruchem swobodnym; wszystkie inne statki, dla których $\Omega \neq \Omega_0$, muszą mieć włączone silniki (Rys. 1).

Powiedzmy, że pasażerowie jednego z tych statków (A) chcą zmierzyć z jakim przyspieszeniem porusza się względem nich inny statek (B). Są oni bardzo skrupulatni i wierzą tylko w takie pomiary, które mogą sami sprawdzić. Na powierzchni planety są dobrze widoczne punkty odniesienia, na sklepieniu nieba widać gwiazdy, bez trudu można więc zmierzyć własną prędkość kątową. Obustronna łączność radiowa pozwala zapytać, jaka jest prędkość kątowa statku (B). Astronauci ze statku A wiedzą więc, że różnica prędkości kątowych między ich statkiem a statkiem B wynosi $\omega = \Omega_B - \Omega_A$. Wiedzą oni także, że krążą wraz ze statkiem B po orbicie kołowej w odległości R od środka planety. Ponieważ znają prawa kinematyki, obliczyli korzystając z tych danych, że względne przyspieszenie wynosi $\omega^2 R$. Nie są jednak zadowoleni z tego wyniku.
„Nie wiemy, czy planeta rotuje. Nie wiemy, czy Wszechświat rotuje. Gdyby tak było, nasze wyznaczenie prędkości kątowej mogłoby być zupełnie fałszywe. Nie widzieliśmy aparatury pomiarowej na statku B i nie wiemy, czy funkcjonuje ona należycie. Ponieważ nie możemy także w żaden sposób skontrolować wyników pomiarów wykonanych na statku B, nie możemy mieć pewności, że są one prawidłowe."

Wątpliwości astronautów ze statku A oraz ich pedanteria mogą wydać się przesadne. Są to jednak wątpliwości należące do pewnych podstawowych reguł uprawiania nauk przyrodniczych. Przyrodnicy (fizycy, astronomowie, biolodzy, chemicy) nie opierają się w swych badaniach na przekonaniach, lecz na faktach, na sprawdzonych faktach (to podejście różni nauki przyrodnicze od takich tworów ludzkiego intelektu jak filozofia, demonologia czy głośna obecnie parapsychologia).

Zaliczenie przez Autora filozofii do pseudonauk jest całkowicie sprzeczne z poglądem redakcji na tę sprawę (przyp. red.).

Tak więc astronauci ze statku A planują wykonanie następującego eksperymentu: w bardzo krótkich odstępach czasu $t_0, t_1, t_2, \ldots$ wyznaczanych na swoim zegarze będą mierzyli radarem odległości $r_0, r_1, r_2, \ldots$ do statku B oraz teodolitem kąty $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, jakie tworzą kierunki na statek B z dowolnie obranym kierunkiem w płaszczyźnie orbity. Zegar, teodolit i radar statku A były wielokrotnie sprawdzane przed eksperymentem i astronauci ufają w rzetelność dokonywanych z ich pomocą pomiarów. Niezależnie od tego, istnieją na tym statku inne komplety zegar — radar — teodolit, na których także wykonywane są przez kogo innego pomiary. Wyniki pomiarów ze wszystkich kompletów są nieustannie porównywane.



Rys. 2

Po wykonaniu pomiarów astronauci zbudują tablicę

$$\begin{array}{cccccc} t & t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & \ldots \\ r & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \ldots \\ \dot r & \dot r_0 & \dot r_1 & \dot r_2 & \dot r_3 & \ldots \\ \ddot r & \ddot r_0 & \ddot r_1 & \ddot r_2 & \ddot r_3 & \ldots, \end{array}$$

gdzie $\dot r = (r_{k+1}-r_k)/\Delta t$, $\ddot r = (\dot r_{k+1}-\dot r_k)/\Delta t$ oraz $\Delta t = t_{k+1}-t_k$. Ponieważ astronauci dokonują wszystkich pomiarów w momencie tyknięcia ich zegara, odstęp pomiędzy dowolnymi kolejnymi tyknięciami, np. t_{10311} i t_{10312} jest stały i wynosi Δt. Podobną tablicę ułożą oni także dla wyników uzyskanych za pomocą teodolitu

$$\begin{array}{cccccc} t & t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & \ldots \\ \varphi & \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \ldots \\ \dot\varphi & \dot\varphi_0 & \dot\varphi_1 & \dot\varphi_2 & \dot\varphi_3 & \ldots \\ \ddot\varphi & \ddot\varphi_0 & \ddot\varphi_1 & \ddot\varphi_2 & \ddot\varphi_3 & \ldots, \end{array}$$

Różnica między ilorazami różnicowymi w tabelach i pochodnymi jest rzędu niższego niż Δt i dąży do zera, gdy $\Delta t \to 0$. W pomiarach zawsze operujemy skończonymi choć możliwie bardzo małymi odstępami czasu. Zastąpienie we wzorach ilorazów różnicowych (wyników eksperymentów) pochodnymi wprowadza błąd rzędu Δt, jeżeli tylko odpowiednie pochodne istnieją. W teoriach fizycznych zakłada się zawsze, że występujące w nich funkcje są ciągłe i gładkie wszędzie tam, gdzie nie istnieje żadna „fizyczna" przyczyna nieciągłości funkcji lub jej pochodnej (przyp. red.).

gdzie $\dot\varphi_k$ i $\ddot\varphi_k$ są określone podobnie jak $\dot r_k$ i $\ddot r_k$. Dane te posłużą astronautom do wyznaczenia przyspieszenia względnego. Będą to oni robić w następujący sposób: Niech osie *Oy*, *Oz* prostokątnego układu współrzędnych będą umieszczone tak, jak na Rys. 2. Mamy więc:

$$z = r\sin\varphi,$$
$$y = r\cos\varphi.$$

Można stąd łatwo obliczyć, że

$$\dot z = \dot r\sin\varphi + \dot\varphi r\cos\varphi; \quad \ddot z = \sin\varphi(\ddot r - r\dot\varphi^2) + \cos\varphi(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi),$$
$$\dot y = \dot r\cos\varphi - \dot\varphi r\sin\varphi; \quad \ddot y = \cos\varphi(\ddot r - r\dot\varphi^2) - \sin\varphi(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi).$$

Kropka nad literą oznacza taką samą operację jak w tabelach. Ponieważ długość wektora przyspieszenia, którą oznaczymy przez a, równa jest (z twierdzenia Pitagorasa) $a = (\ddot z^2 + \ddot y^2)^{1/2}$, więc:

$$a = \sqrt{(\ddot r - r\dot\varphi^2)^2 + 4\left(\dot r\dot\varphi + \frac{1}{2}r\ddot\varphi\right)^2}.$$

Pozwólmy astronautom zająć się pomiarami, a sami spróbujmy obliczyć ich rezultat (Rys. 3).

Z rysunku widać, że

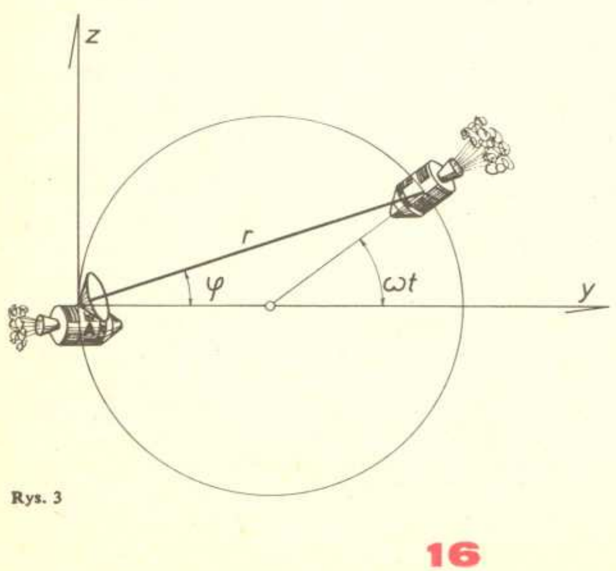
$$\varphi = \frac{\omega t}{2},$$
$$r = 2R\cos\frac{\omega t}{2}.$$

Mamy zatem

$$\dot r = -\omega R\sin\frac{\omega t}{2}; \quad \dot\varphi = \frac{\omega}{2}.$$
$$\ddot r = -\frac{\omega^2 R}{2}\cos\frac{\omega t}{2}; \quad \ddot\varphi = 0.$$

Wstawiając to do wzoru na przyspieszenie otrzymamy:

$$a = \left\{\left(-\frac{\omega^2 R}{2}\cos\frac{\omega t}{2} - 2R\cos\frac{\omega t}{2}\cdot\frac{\omega^2}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{\omega^2 R}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\right)^2\right\}^{1/2} = \omega^2 R.$$



Rys. 3

Oczywiście astronauci nie otrzymują *wzoru* na przyspieszenie ale wartość przyspieszenia (*liczbę*, np. 3,503 m/s²) w każdej chwili czasu.

Jak już pisałem, paradoks ten wymyśliliśmy wspólnie z Piotrem Lasotą. Przedstawialiśmy go wielu naszym kolegom i znajomym, wśród których znaleźli się wybitni fizycy z różnych krajów. Wszyscy w pierwszej chwili twierdzili, że to bzdura.

To, co teraz powiem, wyda się wielu spośród Was zupełną bzdurą. Prawdopodobnie wszystkim, którzy o tym jeszcze nie słyszeli. Przygotowanie z fizyki nie ma tu nic do rzeczy. Nazwę to paradoksem przyspieszeń. Otóż twierdzę, że *jest rzeczą możliwą, iż w pewnej sytuacji astronauci ze statku* A *wyznaczą dla wszystkich statków kosmicznych krążących wraz z nimi po orbicie kołowej dokładnie to samo przyspieszenie*. Więcej: będzie to przyspieszenie równe zeru! Powiecie, że nie jest to możliwe. Obliczyliśmy przecież, że względne przyspieszenie równe jest $\omega^2 R$, tzn. *zależy* od różnicy prędkości kątowej statków. Znikać zaś może tylko wtedy, gdy $\omega = 0$ (bo $R \neq 0$). Zgoda, obliczyliśmy ale astronauci nie *obliczają*, lecz *mierzą* przyspieszenia.

Nasze rachunki słuszne są tylko wtedy, jeżeli dokładnie równoważne są pomiarom radarowym. Tak jednak nie jest, a przynajmniej tak być nie musi. Chwila zastanowienia wystarcza, aby zrozumieć, że przedstawiony wyżej rachunek opiera się na dwóch założeniach:

(a) Szybkość rozchodzenia się sygnałów radarowych jest nieskończenie wielka, albo przynajmniej tak wielka, że można ją w praktyce uznać za nieskończoną.

(b) Sygnały radarowe rozchodzą się po liniach prostych.

W teorii względności nie ma istotnej różnicy między masą i energią ciała ($E = mc^2$). Każde ciało poruszające się, a więc i promieniowanie elektromagnetyczne (fotony), ma pewną masę i zgodnie z teorią grawitacji podlega działaniu sił przyciągania grawitacyjnego. Promienie świetlne z gwiazd przechodząc w pobliżu Słońca odchylają swój bieg podobnie, jak komety tylko znacznie słabiej. Gdybyśmy masę Słońca zwiększyli 100 000 razy lub jego promień zmniejszyli do kilku kilometrów, to światło zaczęłoby krążyć po orbicie okołosłonecznej jak zwykła planeta. Światło, za pomocą którego oglądamy inne statki i mierzymy odległości od nich, krąży bez końca po okręgu. Z punktu widzenia statków na orbicie okrąg ten jest więc prostą i ruch po okręgu staje się jakby ruchem jednostajnym po prostej. Nie jest to jednak taki zwykły ruch po prostej. Każdy statek widzimy równocześnie jako doganiający nas od tyłu i uciekający do przodu. Zastanówcie się co się dzieje, gdy statek nas mija! (przyp. red.).

Oba te założenia przyjmowane są przez newtonowską teorię grawitacji i odrzucane przez ogólną teorię względności. Wiemy też *z doświadczenia*, że nie są one słuszne w świecie, w którym żyjemy.

Wyjaśnienie paradoksu przyspieszeń jest teraz zupełnie proste. Wystarczy powiedzieć, że zgodnie z ogólną teorią względności światło (a więc i sygnały radarowe) może krążyć po kołowej orbicie o promieniu

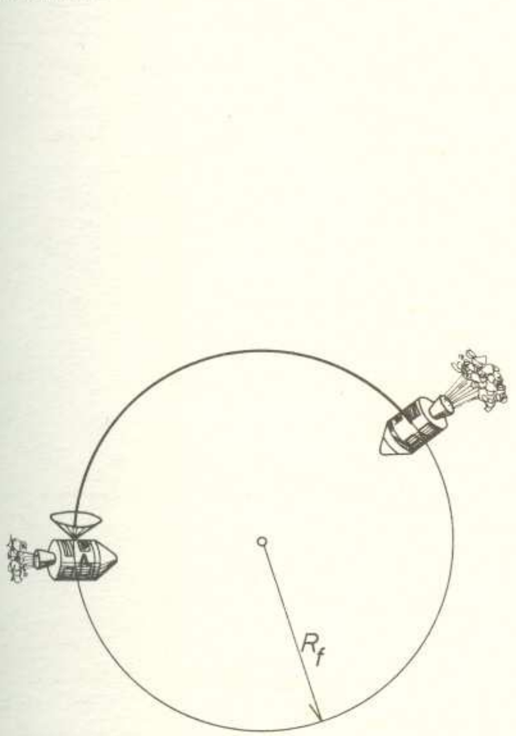
$$R = R_f = \frac{3GM}{c^2}, \text{ (} c \text{ jest prędkością światła),}$$

wokół ciała, którego promień jest mniejszy niż R_f. Zastanówmy się, jak będzie wyglądał eksperyment radarowy na orbicie $R = R_f$ (Rys. 4). Otóż sygnał wysłany przez A odbije się od B i powróci dokładnie z tego samego kierunku, w którym został wysłany w chwili t_0, niezależnie od tego, gdzie znajduje się statek B. Zatem $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$. Nie ma zmiany kierunku!

Podobnie łatwo można się przekonać, że na orbicie $R = R_f$ także $\ddot{r} = 0$. Rzeczywiście, odległość pomiędzy A i B mierzona jest teraz nie po cięciwie $\overline{AB}$ (nie ma sygnałów poruszających się po cięciwie), lecz po łuku $\overset{\frown}{AB}$. Jest ona oczywiście proporcjonalna do czasu

$$r = \omega \alpha t$$

pomiędzy wysłaniem a odebraniem sygnału. Współczynnik α nie może zależeć od czasu, ponieważ oznaczałoby to, że odległość między dwoma ustalonymi punktami na okręgu zmienia się w czasie. Zatem $\dot{r} = \omega\alpha$, $\ddot{r} = 0$. Wstawiając $\varphi = \ddot{\varphi} = 0$ i $\dot{r} = \omega\alpha$, $\ddot{r} = 0$ do wzoru na a dowodzimy tym samym, że $a = 0$.
Warto chwilę zastanowić się nad tym wynikiem:
Jeżeli A i B poruszają się z różnymi prędkościami kątowymi, to oczywiście będą oni spotykali się regularnie co pewien czas. Mimo to ich względne przyspieszenie jest zawsze równe zeru!!!



Rys. 4

M. A. Abramowicz, J. P. Lasota, *Note on a Paradoxical Property of the Schwarzschild Solution*, Acta Phys. Polon., Vol. B5 (1974), No 2, str. 327. Tam też odsyłamy Czytelników orientujących się w teorii względności, którzy chcieliby poznać szczegóły.

Paradoks przyspieszeń nie ma zapewne głębszego znaczenia ani teoretycznego, ani praktycznego. Zdecydowaliśmy się na jego przedstawienie, ponieważ doszliśmy do wniosku, że można na jego przykładzie pokazać, jak bardzo może zawodzić nas intuicja i tzw. zdrowy rozsądek. Jeżeli bardzo wielu bardzo mądrych ludzi wierzy w postrzeganie pozazmysłowe lub w to, że przyspieszenia statków kosmicznych o różnych prędkościach kątowych są różne, to trzeba pamiętać, że wiara taka nie stwarza faktów. Dla fizyka ważne jest to, co pokazują zegary, teodolity i radary.