



Rozwiązanie zadania M 87

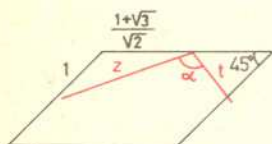
Ponieważ $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$, więc z twierdzenia cosinusów mamy

$$\begin{aligned} z^2 &= 1 + 2 + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}, \\ t^2 &= 1 + 2 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} = 2, \\ \text{skąd } \frac{z^2}{t^2} &= 2 + \sqrt{3}, \quad \frac{z}{t} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Dalej

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{z^2 + t^2 - (y^2 + \sqrt{6})^2}{2zt} = \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3} + 2 - 8 - 4\sqrt{3}}{2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}\sqrt{2}} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

skąd $\alpha = 135^\circ$.



Wynika stąd, że równoległoki \mathcal{R} i \mathcal{S} są podobne. Można skonstruować wiele równoległoków o własności wymienionej w zadaniu, przysługującej równoległokowi \mathcal{R} . Ogłaszamy więc minikonkurs (nagrody!) na wykrycie błędu w rozwiązaniu zadania

M 67 opublikowanym w „Dziele” 11/1975. Rozwiązania prosimy nadsyłać do dnia 1 lipca br.

Jeszcze w średniowieczu niebo gwiazdziste uchodziło powszechnie za coś trwałego i niezmiennego. Dziś wiemy, że procesy rozwojowe, którym podlegają gwiazdy, przebiegają niesłychanie powoli — w skali milionów, albo nawet miliardów lat. Nic więc dziwnego, że w skali życia ludzkiego, czy całej naszej cywilizacji, procesy takie są praktycznie niedostrzegalne. Ale już w średniowieczu zdawano sobie sprawę z istnienia pewnych zjawisk, które najwyraźniej wyłamywały się z owego schematu stałości i niezmienności. Do zjawisk takich należały między innymi gwiazdy zmienne oraz gwiazdy nowe. Oto od czasu do czasu w jakimś miejscu nieba, gdzie atlasy i katalogi astronomiczne nie rejestrowały dotąd żadnego obiektu, pojawiała się niespodziewanie jakaś gwiazda; nic dziwnego, że w takiej sytuacji otrzymywała nazwę „nowej”. Z biegiem czasu jednak gwiazda taka słabła, by po kilku lub kilkunastu tygodniach zniknąć równie tajemniczo jak się pojawiła.

W czasach bardziej nam współczesnych obserwacje teleskopowe pozwoliły stwierdzić, że zjawiska pojawień się gwiazd nowych są dość częste, tyle tylko, że najczęściej gwiazda nowa jest zbyt słaba, by mogła być dostrzeżona gołym okiem. Obecnie gwiazdy nowe odkrywane są masowo — po kilka w ciągu roku, z tym, że raz na kilka lat trafia się obiekt wyjątkowo jasny, widoczny bez pomocy teleskopu. Tak było w sierpniu 1975 roku, kiedy rozblęśta Nowa Łabędzia 1975, której współodkrywcami stali się m.in. dwaj licealiści z Grudziądza. Czy gwiazda nowa znika bezpowrotnie, tak jak to zdawały się sugerować dawne obserwacje? Okazuje się, że nie. Gwiazda słabnie wprawdzie tak bardzo, że przestaje być dostrzegalna gołym okiem, czy nawet przez niewielki teleskop, ale wreszcie jasność jej ustala się mniej więcej na stałym poziomie.

W niektórych wypadkach można też dokonać identyfikacji obiektu na zdjęciach wykonanych przed „pojawieniem” się gwiazdy nowej. Okazuje się wtedy, że gwiazda nowa była wtedy słabiutkim obiektem, o takiej w przybliżeniu jasności jak jej jasność końcowa.

Podsumujemy teraz krótko te informacje, jakich o gwiazdach nowych dostarczają nam obserwacje. Za stan normalny możemy przyjąć umownie sytuację przed, albo tuż po wybuchu. W tym stanie gwiazda nowa jest obiektem o bardzo wysokiej temperaturze. Typowe wartości, to kilkanaście lub kilkadziesiąt tysięcy stopni. Przypomnijmy, że temperatura powierzchni Słońca wynosi tylko niecałe sześć tysięcy stopni. Ale mimo tak wysokich temperatur gwiazdy nowe świecą znacznie słabiej niż Słońce. Wnioskujemy stąd, że rozmiary gwiazd nowych muszą być dużo mniejsze od rozmiarów Słońca.

Podczas wybuchu jasność gwiazdy nowej rośnie kilkadziesiąt tysięcy razy. Równocześnie ulegają wyrzuceniu w przestrzeń zewnętrzne warstwy gwiazdy. Typowa gwiazda nowa traci w wyniku wybuchu ilość materii równą w przybliżeniu jednej tysięcznej masy Słońca. Typowe prędkości wyrzutu — to tysiąc do kilku tysięcy kilometrów na sekundę. Terminu „wybuch” nie musimy już chyba szerzej uzasadniać. Czasem ilość wyrzucanej materii jest tak znaczna, że w kilka lub kilkanaście lat po wybuchu można ją dostrzec w formie otaczającej gwiazdę nową mgławicy, której rozmiary wzrastają z roku na rok. Niektóre spośród gwiazd nowych powtarzają swoje wybuchy. Charakterystyczne odstępy czasu między kolejnymi wybuchami wynoszą przy tym po kilkadziesiąt lat. Te obiekty nazywamy gwiazdami nowymi powrotnymi.



Rozwiązanie zadania M 85

Mamy tożsamości

$$(1) \quad -(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca),$$

$$(2) \quad (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc.$$

Z (1) na podstawie danych wynika, że $ab+bc+ca = 0$.

Z tożsamości (2) otrzymujemy

$$1 = 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3abc,$$

skąd $abc = 0$.



Rozwiązanie zadania F 29

Przykład A:

Ruch spadochroniarza od momentu otwarcia spadochronu opisuje równanie:

$$M \cdot a = M \frac{dv}{dt} = M \cdot g - k \cdot v.$$

Stąd otrzymujemy związek:

$$\int_{v_0}^v \frac{M dv}{Mg - kv} = \int_{t_0}^t dt,$$

gdzie v_0 jest prędkością spadochroniarza w chwili t_0 , w której otworzył spadochron. Oczywiście, jeżeli pominiemy opór powietrza działający na swobodnie spadającego spadochroniarza w pierwszej fazie skoku, to

$$v_0 = \sqrt{2gh} \approx 100 \frac{m}{s}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 10 \text{ s}.$$

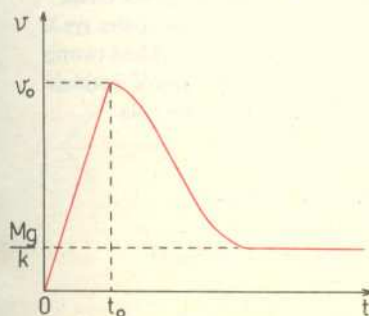
Po obliczeniu całek występujących w równaniu (2) otrzymujemy

$$v = \frac{Mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{M}(t-t_0)} \right) + v_0 e^{-\frac{k}{M}(t-t_0)}$$

Łatwo zauważyć, że dla $t \gg t_0$ jest $v =$

$$= \frac{Mg}{k} \approx 4 \frac{m}{s}.$$

Oznacza to, że od pewnego momentu spadochroniarz będzie opadał ze stałą prędkością, czyli ruchem jednostajnym. Wykres zależności v od t został naszkicowany na rysunku. W bilansie energetycznym należy uwzględnić obok energii potencjalnej i kinetycznej skoczka energię przekazaną powietrzu w procesie hamowania.



Od wielu lat astrofizycy czynili liczne próby wyjaśnienia zagadki gwiazd nowych. Do niedawna jednak próby takie zawodziły. Głównym powodem tych niepowodzeń, był, jak się zdaje, fakt, że w łańcuchu danych obserwacyjnych i wnioskowań teoretycznych brakowało kilku zasadniczych ogniw. Dopiero odkrycia ostatnich lat kilkunastu przyniosły istotny postęp w tej dziedzinie. Pierwszym z nich było przypadkowe odkrycie, że Nowa Herkulesa z 1934 roku jest gwiazdą zaćmieniową, tj. takim układem złożonym z dwu gwiazd, w przypadku którego obserwujemy zmiany jasności wywołwane wzajemnym zakrywaniem się składników. Odkrycie to wzbudziło zrozumiałe zainteresowanie i wywołało falę pytań i spekulacji. Czy Nowa Herkulesa miałyby być obiektem wyjątkowym wśród gwiazd nowych, czy też może wszystkie one są gwiazdami podwójnymi? A jeżeli tak, to czy istnieje jakiś związek między podwójnością i wybuchami tych obiektów?

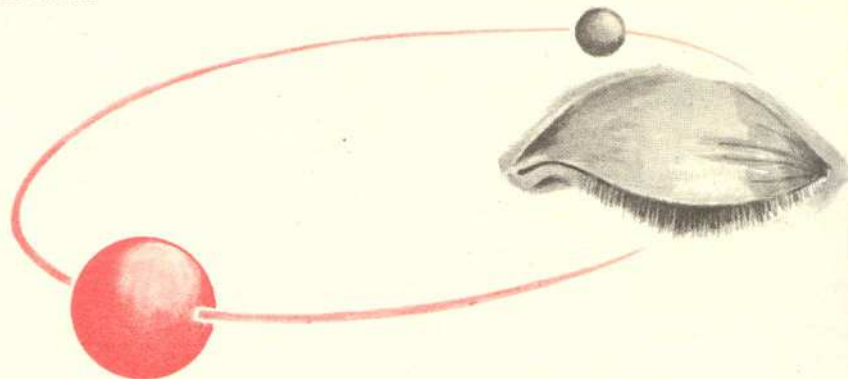
Dla stwierdzenia, czy wszystkie gwiazdy nowe są gwiazdami podwójnymi, konieczne było wykonanie obserwacji ich widm i sprawdzenie, czy linie widmowe podlegają okresowym przesunięciom (zjawisko Dopplera), świadczącym o ruchu składników wokół wspólnego środka masy.

Zebranie odpowiedniego materiału obserwacyjnego było jednak trudne; wymagało użycia największego teleskopu świata — pięciometrowego reflektora w Obserwatorium na Mount Palomar — i wielu nocy obserwacyjnych. Program taki został jednak wreszcie zrealizowany przed kilkunastu laty, przez amerykańskiego astrofizyka Roberta Krafta. Jego wyniki przyniosły pełne potwierdzenie domysłów, że wszystkie gwiazdy nowe są układami podwójnymi.

Szczególnie ważne informacje o gwiazdach tworzących układ podwójny można jednak uzyskać tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z tzw. układami zaćmieniowymi. A więc należało także podjąć program zmierzający do odkrycia, a następnie dokładnego przebadania takich układów. To zadanie podjął współpracujący z Kraftem astrofizyk polski Wojciech Krzemieński. Dzięki dostępowi do dużych teleskopów w kilku obserwatoriach w Kalifornii i Arizonie oraz francuskim obserwatorium Haute Provence wykonał on kilkadziesiąt tysięcy pomiarów jasności wielu gwiazd nowych. Materiał ten pozwolił na odkrycie kilku układów zaćmieniowych. Należy do nich między innymi Nowa Strzały, która wybuchła dwukrotnie — w roku 1913 i 1946 — a która odznacza się rekordowo krótkim okresem obiegu składników, wynoszącym zaledwie 88 minut. Odkrycie podwójnego charakteru gwiazd nowych stanowiło tylko pierwszy krok na drodze do wyjaśnienia ich zagadki. Krok drugi, to podanie opisu własności fizycznych składników i procesów zachodzących w tych układach. Wiemy już teraz, że gorący składnik będący właściwą gwiazdą nową, to tzw. biały karzeł, zaś jego towarzysz — to słaba gwiazda o niskiej temperaturze powierzchni. Współistnienie takich dwu gwiazd nie ogranicza się jednak tylko do obiegania wspólnego środka masy układu. Gdyby tak było, procesy rozwoju takich dwu gwiazd przebiegałyby niemal zupełnie niezależnie. W wypadku gwiazd nowych, podobnie jak w wypadku wielu innych układów podwójnych, obserwujemy proces przepływu materii od jednego składnika do drugiego. Wynikiem takiego procesu jest nie tylko zwiększanie się masy jednego ze składników kosztem masy drugiego, ale także zmiany jakie muszą zajść w strukturze gwiazdy. W naszym wypadku przepływ materii następuje od gwiazdy chłodniejszej do gwiazdy gorętszej. Konsekwencje tego procesu można przewidzieć na podstawie rozważań teoretycznych.

Zastanówmy się, jak reaguje ów gorący składnik układu, do którego dopływa materia od towarzysza. Co wiemy o białych karłach? Wiemy, że są to gwiazdy znajdujące się w końcowych stadiach swego rozwoju. W stadiach wcześniejszych w ich wnętrzach zachodziły reakcje jądrowe, w wyniku których wyzwalały się znaczne ilości energii, dzięki którym gwiazda mogła świecić. Wynikiem reakcji jądrowych była jednak także zmiana składu chemicznego. Biały karzeł jest gwiazdą, która nie dysponuje już żadnymi zapasami jądrowego „paliwa”, w szczególności wodoru. Jej wnętrze jest jednak nadal gorące — nawet na powierzchni temperatura wynosi kilkadziesiąt tysięcy stopni — tak, że powolne stygnięcie takiej gwiazdy trwać może miliardy lat. Jeżeli biały karzeł jest gwiazdą pojedynczą, nic już nie zmieni jego losu. Ale oto mamy do czynienia z układem podwójnym. Chłodny towarzysz przekazuje materię białemu karłowi. Obserwacje pokazują, że materia ta bogata jest w wodór; najwyraźniej dwa składniki różnią się bardzo pod względem swego składu chemicznego. Na powierzchni białego karła tworzy się więc cienka warstewka materii bogatej w wodór. Z biegiem czasu robi się coraz grubsza. Na razie nic się nie dzieje. Temperatura w obrębie tej warstewki wynosi zaledwie kilkadziesiąt lub kilkaset tysięcy stopni, a to nie wystarcza do zachodzenia reakcji jądrowych spalania wodoru. Ale wreszcie warstwa ta staje się na tyle gruba, że gdzieś głęboko pod powierzchnią gwiazdy temperatura

wynosi już kilka milionów stopni. Analiza teoretyczna pokazuje, że przebieg reakcji jądrowych, jakie muszą już zajść w tej temperaturze będzie bardzo gwałtowny. Nastąpi wybuch, w ramach którego gwiazda wyrzuci w przestrzeń swą cienką otoczkę. A więc wybuch gwiazdy nowej... A co dalej? Proces przepływu materii trwa nadal i cały cykl powtórzy się na nowo. Skoro znamy już teraz, przynajmniej w ogólnych zarysach, przyczyny i mechanizm wybuchów gwiazd nowych, czy można by uznać że te obiekty przestały już należeć do klasy „najciekawszych” obiektów astronomicznych? Chyba nie. Oto w ostatnich latach, gdy odkryto istnienie kosmicznych źródeł promieniowania rentgenowskiego, okazało się, że dość liczną ich klasę stanowią układy podwójne i to pod wieloma względami podobne do gwiazd nowych. Zarówno te podobieństwa, jak i oczywiste różnice, a dalej — sprawa wyjaśnienia, jakie układy podwójne i w jaki sposób stają się na pewnym etapie rozwoju gwiazdami nowymi lub źródłami rentgenowskimi, wszystko to są problemy oczekujące wyjaśnienia...



Zadania

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M 85 Wiedząc, że $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$, obliczyć abc .

Rozwiązanie na str. 14

M 86 Rozwiązać układ nieskończenie wielu równań

$$x \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + y \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + z \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Rozwiązanie na str. 14

M 87 Udowodnić, że równoległobok \mathcal{R} o kącie ostrym 45° i bokach długości 2 i $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ jest podobny do równoległoboku \mathcal{S} o wierzchołkach będących środkami boków równoległoboku \mathcal{R} . (Por. zadanie M 67, Delta 11/1975).

Rozwiązanie na str. 4

Z. Piesyk

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 29 Oto dwie, pozornie różne, sytuacje:

- Spadochroniarz o masie $M = 80$ kg skacze z samolotu lecącego na wysokości $H = 8$ km. Po przeleceniu w kierunku pionowym $h = 500$ m, spadochroniarz otwiera spadochron, który doznaje siły oporu powietrza proporcjonalnej do chwilowej prędkości spadochroniarza ($F_{op} = k \cdot v$). Współczynnik proporcjonalności k wynosi 200 kgs^{-1} .
- Pręt metalowy o długości l , masie m i oporze omowym R zaczyna ześlizgiwać się bez tarcia po równoległych szynach przewodzących nachylonych do poziomu pod kątem α (patrz rys.). Dolne końce szyn połączone są poprzeczną szyną, równoległą do pręta, tak, że całość tworzy zamknięty, prostokątny obwód przewodzący. Opory szyn są zaniedbywalne. Całość znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B , równoległym do kierunku pola grawitacyjnego.

Rozważcie następujące zagadnienia:

- Jaką prędkość w danej chwili czasu, t , licząc od początku ruchu, będzie miał spadochroniarz (pręt)?
- Jak należy rozumieć zasadę zachowania energii dla rozpatrywanych przypadków?
- Czy prędkość pręta zależy od zwrotu wektora indukcji B ?

Rozwiązanie na str. 5 (przykład A) i str. 9 (przykład B).

