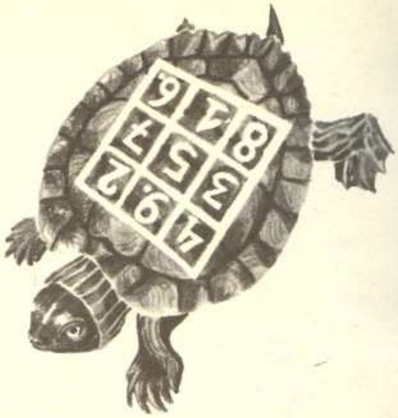
Czarna magia?

„Co jest najmądrzejsze? — Liczba.
Co jest najpiękniejsze? — Harmonia.
Czym jest cały świat? — Liczbą i harmonią."
(z filozofii pitagorejczyków).

Tomasz NATKANIEC

Autor w momencie nadesłania artykułu był uczniem IV kl. LO w Skarżysku Kamiennej



Stara legenda chińska, która sięga 2200 roku p.n.e. opowiada, iż na pancerzu boskiego żółwia, który wyłonił się z morza, znajdował się kwadrat magiczny. Tak miała powstać ta dziwna figura łącząca w sobie mądrość liczb i piękno harmonii.

Z pewnością każdy z Czytelników zetknął się wcześniej z pojęciem kwadratu magicznego. Zazwyczaj były to jednak kwadraty o stałej sumie tj. takie, że suma liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych jest stała. Kwadratem takim jest kwadrat Dürera, umieszczony na jednym z dzieł tego malarza, zatytułowanym — „Melancholia" (dwie środkowe liczby dolnego wiersza tworzą rok powstania dzieła).

Typowe kwadraty magiczne o stałej sumie budowane są z liczb postępu arytmetycznego.

O wiele mniej rozpowszechnione są kwadraty magiczne o stałym iloczynie. Kwadratem magicznym o stałym iloczynie nazywamy kwadrat rozbity na pewną ilość mniejszych kwadratów (pól), w które tak wpisano różne liczby naturalne, że iloczyn liczb w każdym wierszu, kolumnie i przekątnej jest stały. Ten stały iloczyn nazwiemy iloczynem magicznym π, zaś liczbę pól w każdej kolumnie (wierszu) — rzędem kwadratu magicznego.

Kwadraty magiczne o stałym iloczynie mają właściwości analogiczne do właściwości kwadratów magicznych o stałej sumie. Podamy bez dowodów dwie z nich:

I *Kwadrat magiczny nie straci swej magiczności, jeżeli wszystkie liczby składowe pomnożymy przez daną liczbę całkowitą.*

II *Iloczyn dowolnej ilości kwadratów magicznych n-tego rzędu jest również kwadratem magicznym.* (Mnożenie kwadratów magicznych polega na mnożeniu liczb znajdujących się na odpowiadających sobie polach).

W teorii kwadratów magicznych o stałej sumie typowym zadaniem jest budowa kwadratów z liczb postępu arytmetycznego (o dodatniej różnicy). Analogicznie w teorii kwadratów magicznych o stałym iloczynie — budowa kwadratów z liczb postępu geometrycznego (o ilorazie większym od 1). Znając zasady układania kwadratów magicznych o stałej sumie można w prosty sposób zbudować kwadrat magiczny o stałym iloczynie. Metoda ta opiera się na znanej zasadzie mnożenia potęg o równych podstawach.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

kwadrat magiczny o stałej sumie

→

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

=

16	512	4
8	32	128
256	2	64

kwadrat magiczny o stałym iloczynie

Ba! Co jednak robić, gdy nie zna się zasad budowy kwadratu magicznego o stałej sumie? Spróbujmy zbudować kwadrat magiczny o stałym iloczynie nie posługując się przy tym kwadratem magicznym o stałej sumie. Dokonamy tego za pomocą mnożenia dwóch kwadratów magicznych o stałym iloczynie.

a^2	1	a
1	a	a^2
a	a^2	1

b	1	b^2
b^2	b	1
1	b^2	b

→

a^2b	1	ab^2
b^2	ab	a^2
a	a^2b^2	b

12	1	18
9	6	4
2	36	3

Pierwsze dwa kwadraty można zbudować bez większych trudności, nie zadowalają one jednak naszych ambicji, gdyż poszczególne liczby powtarzają się. Otrzymany kwadrat III jest już bez zarzutu. Teraz wystarczy podstawić za a i b liczby (najlepiej pierwsze) np. $a = 2$, $b = 3$ i już mamy gotowy kwadrat magiczny o stałym iloczynie równym 216.
W podobny sposób możemy zbudować kwadrat magiczny czwartego rzędu. Krokiem wstępnym jest tu budowa 7 prostych kwadratów pomocniczych.

a	1	1	1
1	1	a	1
1	1	1	a
1	a	1	1

1	b	1	1
1	1	1	b
1	1	b	1
b	1	1	1

1	1	c	1
c	1	1	1
1	c	1	1
1	1	1	c

1	1	1	d
1	d	1	1
d	1	1	1
1	1	d	1

1	e	1	1
1	1	e	1
e	1	1	1
1	1	1	e

f	1	1	1
1	1	1	f
1	f	1	1
1	1	f	1

1	1	g	1
1	g	1	1
1	1	1	g
g	1	1	1

→

af	be	cg	d
c	dg	ae	bf
de	cf	b	dg
bg	a	df	ce

a^3	a^{16}	a^{10}	a^5
a^9	a^6	a^4	a^{15}
a^8	a^{11}	a^{13}	a^2
a^{14}	a	a^7	a^{12}

Po wymnożeniu tych kwadratów otrzymujemy właściwy kwadrat magiczny czwartego rzędu o iloczynie magicznym $\pi = abcdef$.
Załóżmy: $g = a, f = a^2, e = a^3, d = a^5, c = a^9, b = a^{13}$.
Podstawiając do naszego kwadratu otrzymujemy kwadrat taki, jak na marginesie.
Doszliśmy do pierwszej metody; zatem metoda druga jest ogólniejsza.
Na zakończenie proponujemy co wytrwalszym Czytelnikom udowodnienie, że nie można zbudować kwadratu magicznego stopnia 3 lub 4 o stałym iloczynie z liczb postępu arytmetycznego.

Rozwiązanie zadania F 29.

Przykład B

Ześlizgiwanie się pręta po szynach pod wpływem siły ciężkości powoduje zmianę strumienia indukcji magnetycznej przenikającej przez przewód utworzony z pręta i szyn.
Dlatego w obwodzie wystąpi siła elektromotoryczna indukcji skierowana tak, aby przeciwdziałać zmianie strumienia, czyli zsuwaniu się pręta. Na pręt, przez który płynie prąd indukcyjny o natężeniu i, działa siła oporu, równoległa do podstawy równi o składowej wzdłuż powierzchni równi skierowanej przeciwnie do zsuwającej pręt składowej siły ciężkości. Zwrot tej siły nie zależy od kierunku wektora B.
Liczymy wartość tej siły.
Strumień magnetyczny przenikający przez obwód w danej chwili t, gdy pręt jest odległy o odcinek x od dolnej szyny (patrz rysunek przy zadaniu) wynosi:

$$\Phi = B \cdot x \cdot l \cdot \cos\alpha.$$

Stąd

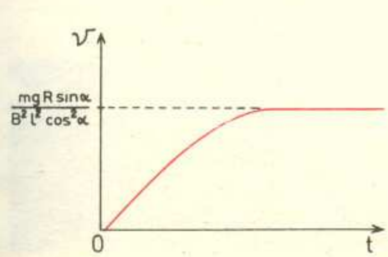
$$i = \frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B \cdot l \cdot \cos\alpha}{R} \cdot v,$$

gdzie v jest chwilową prędkością pręta względem szyn.
Równanie ruchu pręta wzdłuż równi:

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - iB \cdot l\cos\alpha = mg\sin\alpha - \frac{B^2l^2\cos^2\alpha}{R} \cdot v, \tag{4}$$

jest analogiczne do równania (1) otrzymanego w Przykładzie A. Ponieważ dla pręta $t_0 = 0$, $v_0 = 0$ stąd:

$$v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2\cos^2\alpha}\left(1 - e^{\frac{-B^2l^2\cos^2\alpha}{Rm}t}\right). \tag{5}$$



Analizując postać tego wzoru dla małych wartości t (początek ruchu) otrzymujemy (rozwijając e^{-xt} w szereg Taylora): $v = g\sin\alpha t$, czyli ruch jednostajnie przyspieszony.

Natomiast dla dużych wartości t, zsuwanie się pręta będzie przebiegać jednostajnie z prędkością $v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2\cos^2\alpha}$.

Wykres zależności v od t został naszkicowany na rysunku.
Ponieważ znamy wzór na pracę prądu elektrycznego, łatwo można sprawdzić, że strata energii potencjalnej pręta w przedziale czasu dt równa się ciepłu wydzielonemu przez prąd indukcyjny (rozważamy dla ułatwienia moment, gdy pręt zsuwa się już ruchem jednostajnym).
Mianowicie należy pokazać, że:

$$mgv\sin\alpha \cdot dt = i^2Rdt.$$

Podstawienie odpowiednich wyrażeń na i i v pozostawiamy Czytelnikom.