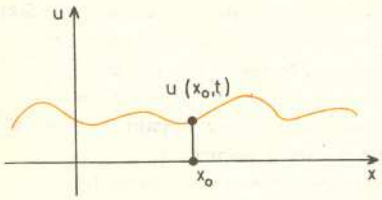
Dr Tadeusz IWANIEC

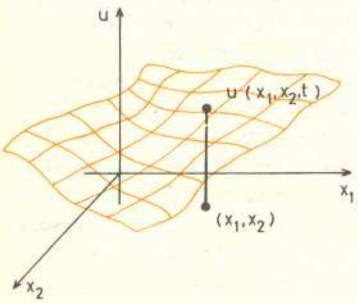
Równanie struny



Zjawisko rozchodzenia się fal opisuje się za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. Zilustrujemy to na przykładzie struny nieskończonej. W każdej chwili czasu $t \geqslant 0$ kształt struny drgającej przedstawiony jest wykresem pewnej funkcji $u(x, t)$ która mierzy odchylenie struny od położenia ustalonego. Jeśli znamy funkcję $u(x, t)$, to znamy ruch drgający struny. Ruch ten jest spowodowany działaniem sił naprężeniowych na każdy jej element. Struna wydłuża się lub kurczy, przy tym zachowana jest zasada Hooka o stałości stosunku wydłużenia do naprężenia. Na podstawie tego można wyprowadzić równanie dla funkcji $u(x, t)$.
Ma ono następującą postać:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie przez $\dfrac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ i $\dfrac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ oznaczyliśmy drugie pochodne funkcji u odpowiednio względem zmiennych x i t, c zaś jest stałą.
Rozpatrzmy teraz przypadek drgań dwuwymiarowych. Wyobraźmy sobie nieskończoną membranę (cienka sprężysta płytka). W każdej chwili czasu $t \geqslant 0$ położenie drgającej membrany przedstawia pofałdowaną powierzchnię. Opisujemy ją za pomocą funkcji u zależnej tym razem od zmiennych (x_1, x_2, t).



Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym funkcja u spełnia równanie:

(2) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

W przestrzeni trójwymiarowej ruch drgający (np. fali elektromagnetycznej czy ruch dźwięku) jest opisany za pomocą funkcji $u(x_1, x_2, x_3, t)$ spełniającej równanie

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Przez analogię mówimy, że w przestrzeni n-wymiarowej ruch drgający opisuje funkcja $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ spełniająca równanie falowe postaci

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Umiejętność rozwiązywania równań falowych jest rzeczą bardzo ważną, szczególnie w fizyce.
Wróćmy do równania (1). Jeśli f i h są funkcjami dwa razy różniczkowalnymi, to funkcja $u(x, t)$ określona wzorem

(5) $$u(x, t) = f(x+ct) + h(x-ct)$$

spełnia równanie (1). Można udowodnić, że tylko funkcje postaci (5) mogą być rozwiązaniami równania (1).
Tak więc równania falowe mają nieskończenie wiele rozwiązań. Jest to fakt typowy nie tylko dla równań falowych. Wobec tego możemy nałożyć na poszukiwane rozwiązanie $u(x, t)$ dodatkowe warunki. Powstają one w naturalny sposób w zagadnieniach fizycznych. Zilustrujemy to na przykładzie struny nieskończonej. Niezależnie od początkowego położenia struna będzie drgała na skutek istniejących naprężeń. Jeżeli przez $u_0(x)$ oznaczymy funkcję przedstawiającą początkowe położenie, to obok równania (1) pojawi się druga zależność, którą ma spełniać funkcja $u(x, t)$. Jest to tzw. warunek początkowy

(6) $$u(x, 0) = u_0(x).$$

Struna może być w położeniu początkowym $u_0(x)$ puszczona swobodnie lub możemy każdy jej element puścić z dowolną prędkością początkową $v_0(x)$. Ponieważ prędkość jest pochodną położenia $u(x, t)$ względem czasu t, to możemy napisać drugi warunek początkowy

(7) $$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v_0(x) \quad \text{dla } t = 0.$$

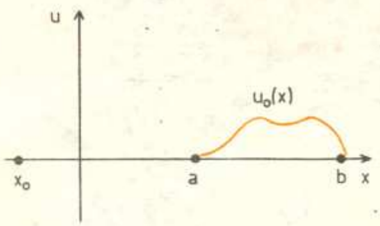
Rozwiązanie zadania M 82.
Funkcja taka istnieje, na przykład (zob. zad. M 65, Delta 10/1975)

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ dla } x \text{ wymiernych,}\\ 0 \text{ dla } x \text{ niewymiernych.}\end{cases}$$

Jeżeli bowiem liczba w jest wymierna i x niewymierna, to $x+w$ jest niewymierna, jeżeli zaś obydwie liczby x i w są wymierne, to $x+w$ jest wymierna i $f(x+w)=f(x)$.
Na drugie pytanie odpowiedź jest negatywna. Okresami szukanej funkcji musiałyby być na przykład liczby niewymierne $a=\sqrt{2}$ i $b=2-\sqrt{2}$. Suma okresów jest znowu okresem co wynika z równości

$$f(x+a+b)=f(x+a)=f(x).$$

Ponieważ jednak $a+b=2$ jest liczbą wymierną, to szukana funkcja musiałaby mieć również okres będący liczbą wymierną.



Początkowe położenie struny.

Problem znalezienia funkcji $u(x, t)$ spełniającej układ warunków

$$(8)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\ u(x,0)=u_0(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=v_0(x)\end{cases}$$

nazywa się zagadnieniem Cauchy'ego.
Zagadnienie Cauchy'ego w przypadku n-wymiarowym zapisujemy w postaci

$$(9)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\\ u(x_1,\ldots,x_n,0)=u_0(x_1,\ldots,x_n),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1,\ldots,x_n,0)=v_0(x_1,\ldots,x_n).\end{cases}$$

Jeśli funkcje u_0 i v_0 są dostatecznie regularne, to problem Cauchy'ego ma zawsze dokładnie jedno rozwiązanie, stawianie dalszych warunków może więc doprowadzić do nieistnienia rozwiązań. Innymi słowy ruch struny czy membrany jest jednoznacznie wyznaczony przez położenie i prędkość początkową. W przypadku struny przekonujemy się o tym w sposób następujący. Warunki (6) i (7) zapisujemy w postaci

$$(10)\qquad \begin{cases}u_0(x)=f(x)+h(x),\\ v_0(x)=cf'(x)-ch'(x).\end{cases}$$

Stąd obliczamy pochodne funkcji $f(x)$ i $h(x)$:

$$(11)\qquad \begin{cases}f'(x)=\dfrac{cu_0'(x)+v_0(x)}{2c},\\ h'(x)=\dfrac{cu_0'(x)-v_0(x)}{2c}.\end{cases}$$

Funkcje f i h są na podstawie wzorów (11) wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do stałej, więc funkcja $u(x, t)$ na podstawie wzoru (5) jest wyznaczona jednoznacznie (patrz warunek (6)). Wyobraźmy teraz sobie strunę niedrgającą. Odpowiada to warunkom początkowym zerowym.

Zbadajmy, co się stanie, jeśli strunę wprawimy w ruch drgający przez zmianę kształtu i prędkości struny na pewnym ustalonym odcinku $\langle a, b\rangle$ (np. potrącając palcem)?

Zakładamy więc, że funkcje $u_0(x)$ i $v_0(x)$ zerują się poza odcinkiem $\langle a, b\rangle$. Na podstawie wzorów (10) i (11) możemy założyć, że funkcje $f(x)$ i $h(x)$ są równe zeru poza odcinkiem $\langle a, b\rangle$. Niech x_0 będzie dowolnym punktem na osi x. Powstaje pytanie, dla jakich wartości t jest $u(x_0, t)\neq 0$, tzn. w jakim okresie czasu struna drga w punkcie x_0. Na podstawie poprzedniej uwagi musi być

$$x_0+ct\in\langle a, b\rangle \text{ lub } x_0-ct\in\langle a, b\rangle.$$

Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $x_0<a$. Teraz alternatywa ta dla $t\geqslant 0$ jest równoważną jednej nierówności dwustronnej

$$t_0=\frac{a-x_0}{c}\leqslant t\leqslant\frac{b-x_0}{c}=t_1.$$

A zatem sygnał powstały w wyniku zaburzenia struny na odcinku $\langle a, b\rangle$ pojawi się w punkcie x_0 dopiero po upływie czasu $t_0=\dfrac{a-x_0}{c}$, trwać będzie przez okres t_1-t_0, a następnie zniknie.

Jest to zasada Huygensa w przypadku jednowymiarowym. Ze wzoru $c=\dfrac{a-x_0}{t_0}$ widać, że c jest jako stosunek drogi do czasu, prędkością rozchodzenia się sygnału. Podobna zasada ma miejsce w przestrzeni trójwymiarowej. Każdy z nas wie, że dźwięk wydany w pewnej odległości dociera do nas po pewnym czasie, trwa przez jakiś czas, a następnie zanika. Ten fakt może być również udowodniony na podstawie zależności (3) i może być uogólniony na przypadek, gdy n jest dowolną liczbą nieparzystą. Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja z membraną lub ogólniej dla n parzystych.

Warunki (9) dla n parzystych implikują następującą własność rozwiązania: sygnał wydany w przestrzeni parzystowymiarowej dociera do dowolnego punktu i trwa wiecznie.
Gdybyśmy żyli w świecie płaskim dwuwymiarowym lub czterowymiarowym, słyszelibyśmy wszystko, co zostało kiedykolwiek powiedziane, a więc nie rozumielibyśmy niczego.