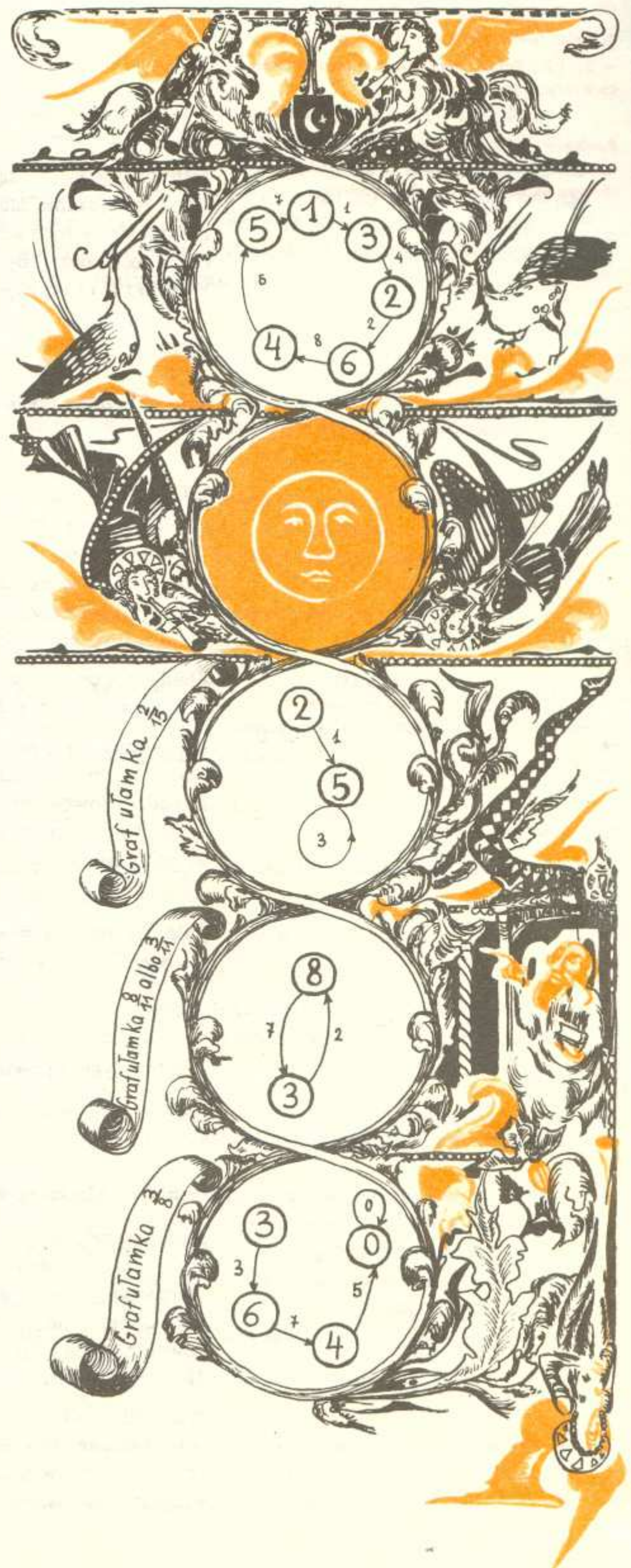
mała delta

Co ma mapa nieba do ułamków okresowych

Obliczenia, kiedy nastąpi kolejne zaćmienie Słońca budzą z pewnością więcej zainteresowania niż obliczenia, jaka cyfra wystąpi na 1288 miejscu po przecinku w rozwinięciu ułamka 57 na odpowiedni ułamek dziesiętny. A jednak obydwa zagadnienia mają ze sobą coś wspólnego.
Zaćmienia Słońca i wzajemne położenie planet są zjawiskami, które powtarzają się okresowo.
Podobnie w rozwinięciu dziesiętnym ułamka zwykłego będzie się wciąż powtarzał ciąg cyfr jego okresu. Wydawać by się mogło, że po zamianie ułamka zwykłego na okresowy problem został wyczerpany. Chciałbym Was jednak przekonać, że badając zagadnienie wnikliwiej można dojść do ciekawych wniosków. Zaczniemy zatem od zwykłego dzielenia 5:7.



Dzielenie to wykonujemy według następującego programu:
1 etap: obliczanie pierwszej cyfry po przecinku.
Dane: dzielna $d_1 = 5$.
Obliczenia: Dzielenie z resztą $10d_1:7$.
Wyniki: iloraz $p_1 = 7$ oraz reszta $r_1 = 1$.
Wyniki obliczeń pierwszego etapu zużytkowujemy następująco: iloraz p_1 wpisujemy jako pierwszą cyfrę po przecinku szukanego rozwinięcia dziesiętnego, natomiast resztę r_1 wpisujemy jako dzielną d_2 następnego, drugiego etapu obliczeń.
Analogicznie będzie przebiegał etap drugi i dalsze. Postępowanie można kontynuować dowolnie długo, gdyż każdy etap dostarcza danej umożliwiającej rozpoczęcie następnego etapu obliczeń. Przedstawimy teraz przebieg tego programu na odpowiednim grafie. Zaznaczymy na nim strzałkami, w jakiej kolejności pojawiać się będą reszty z kolejnych obliczeń. Pamiętając, że każda reszta jest zarazem dzielną dla następnego etapu obliczeń, możemy dodatkowo umówić się, że pierwszą dzielną $d_1 = 5$ potraktujemy jako resztę zerową. Natomiast ilorazy wykonywanych obliczeń zaznaczymy pisząc odpowiednie liczby obok strzałek.

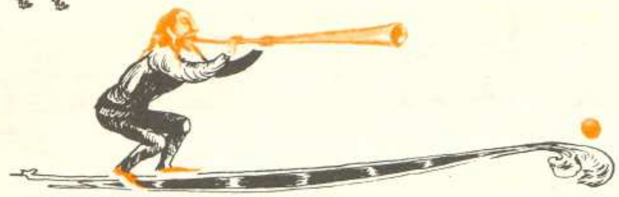
Narysowany graf bardzo wyraźnie pokazuje w jaki sposób tworzy się okres: jedna z reszt powtórzyła się i łańcuch strzałek utworzył obieg zamknięty. Obliczenia możemy przerwać, a dalsze wyniki odczytać bezpośrednio z grafu. Podobne obiegi zamknięte wystąpią przy dzieleniach: 2:15, 8:11, 3:8 przedstawionych na odpowiednich grafach.

Czy występowanie obiegów zamkniętych, a więc okresowość odpowiednich ułamków dziesiętnych jest regułą obowiązującą zawsze? Odpowiedź narzuci się sama, gdy spróbujemy rysować grafy w inny sposób (opisany przykładowo dla dzielenia przez 7): Zaczynamy od narysowania 7 kółek i wpisania w nie liczb: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Są to już wszystkie reszty jakie mogą wystąpić przy dzieleniu przez 7. Teraz dopiero łączymy kółka strzałkami.

Spróbujcie zrobić to w ten sposób, żeby strzałki nie utworzyły żadnego zamkniętego obiegu. Jest to niemożliwe — nawet jeśli pierwszych sześć strzałek poprowadzicie nie zamykając żadnego łańcucha, zrobi to siódma strzałka!

Otrzymane wyniki możemy skomentować następująco: zamieniając dowolny ułamek zwykły na dziesiętny otrzymujemy zawsze ułamek okresowy. Szczególnym przypadkiem jest takie rozwinięcie, którego okres składa się z samych zer (odpowiada to pętelce przy zerze) — mamy wówczas do czynienia z rozwinięciem skończonym. Teraz pora na obiecane, ciekawe wnioski. Oto rozwinięcie dziesiętne liczby, która nie jest żadnym ułamkiem zwykłym: 0,1234567891011121314151617181920212223...
(trzy kropki na końcu oznaczają, że dalej trzeba wpisywać kolejne cyfry tak jak mówi reguła, której się łatwo domyśleć). Liczby takie nazywamy liczbami niewymiernymi. Czy potraficie uzasadnić, dlaczego liczba ta nie jest żadnym ułamkiem zwykłym? Czy potrafilibyście wymienić inne liczby o podobnej własności? Jeśli tak, to na pewno rozwiążecie poniższe zadania.

Zadanie 1. Obliczcie jaka cyfra wystąpi na 1288 miejscu w rozwinięciu 5/7 na ułamek dziesiętny.
Zadanie 2. Narysujcie grafy dla dzielenia przez 2, 4, 8 i 16. Spróbujcie odgadnąć, jak powinien wyglądać graf dla dzielenia przez 32 i sprawdźcie Waszą hipotezę.
Zadanie 3. Pomyślcie, do czego można wykorzystać grafy dzielenia.
Zadanie 4. Rysunek obok posłuży do następujących obliczeń. Każdej z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7... przyporządkujemy pewien ciąg sześciu liczb według takiej zasady:
Pierwszą z sześciu cyfr ciągu przyporządkowanego liczbie *m* ustalamy odszukując na rysunku liczbę 1 i idąc od niej po strzałkach *m* kroków. Liczbę, do której zawędrujemy wpisujemy na 1 miejscu. Następną, drugą cyfrę ciągu przyporządkowanego liczbie *m* ustalamy odszukując na rysunku liczbę 2 i idąc od niej po strzałkach *m* kroków. Liczbę, do której zawędrujemy, wpisujemy na drugim miejscu.
Trzecią, czwartą, piątą i szóstą liczbę *m*-tego ciągu ustalamy analogicznie.
Jak wygląda ciąg przyporządkowany liczbie 1288?
Jakie analogie zauważyliście między obliczeniami z tego zadania a obliczaniem rozwinięć dziesiętnych?

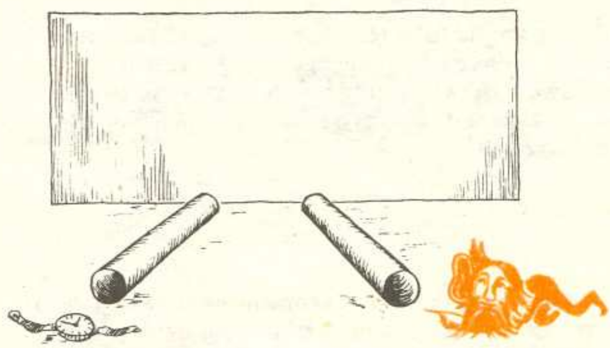


Czym są dźwięki?

Każdy prawie dźwięk powstaje wskutek drgania jakiegoś ciała. Drgania silnika samochodu, skrzydełek owada, strun instrumentów muzycznych, strun głosowych ludzi i zwierząt powodują powstanie następujących po sobie zgęszczeń i rozrzedzeń powietrza, które rozchodzą się we wszystkich kierunkach. Nie widzimy ich, ponieważ przypadkiem powietrze jest niewidoczne. Może jednak uda nam się zbadać, jak rozchodzi się głos? Pomogą nam w tym doświadczenia.

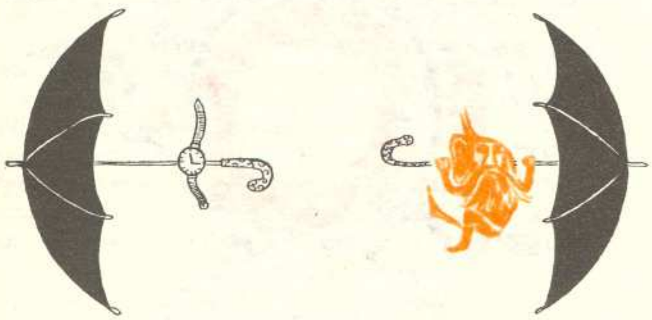
Odbicie dźwięku

Fale głosowe odbijają się od każdej napotkanej przeszkody, jak światło od lustra. Echo na przykład jest wynikiem odbicia ,,promienia dźwiękowego'' od brzegu lasu, ściany domu czy skały. Tak, jak w przypadku fali świetlnej, kąt odbicia fali głosowej równa się kątowi padania. Można się o tym przekonać za pomocą zegarka i dwóch kartonowych rurek.
Połóż jedną rurkę przy ścianie lub innej pionowo ustawionej, płaskiej przeszkodzie, pod pewnym kątem do niej jak na rysunku. Przy drugim końcu rurki połóż tykający zegarek. Drugą rurkę przyłóż do ściany podobnie, jak pierwszą. Zmieniaj kąt nachylenia tej rurki względem ściany, przykładając ucho do jej drugiego końca. Powinieneś usłyszeć tykanie zegarka tak, jakby pochodziło ono z wnętrza tej rurki. Przekonasz się, że tykanie to słychać najwyraźniej, kiedy rurki są nachylone pod tym samym kątem do ściany.



Dźwiękowe reflektory

Zwierciadła dźwiękowe, podobnie jak te zwykłe, odbijające światło, mogą być nie tylko płaskie, ale i wklęsłe. Działają wtedy jak reflektor. Można to zademonstrować w następujący sposób:
Weź dwa parasole i poproś by dwie osoby trzymały je w odległości kilku metrów naprzeciw siebie tak, jak na rysunku.
Przyłóż ucho do rączki jednego parasola i znajdź miejsce, gdzie dźwięki rozchodzące się w pokoju słychać najgłośniej. Umocuj tam tykający zegarek, a sam przyłóż ucho w analogicznym miejscu drugiego parasola. Powinieneś usłyszeć tykanie zegarka nawet z odległego końca pokoju.
Podobne doświadczenie możesz zrobić używając dwóch misek lub głębokich talerzy. Połóż jeden talerz na stole, a nad nim trzymaj zegarek. Drugi talerz trzymaj do góry dnem nad pierwszym na wysokości ucha. Przyłóż ucho do tego talerza i posłuchaj. Usłyszysz tykanie zegarka tak, jakby był on bezpośrednio pod górnym talerzem. Oddal na próbę ten talerz i dźwięk zniknie.
Z tej własności dźwięku od dawna zdawali sobie sprawę budowniczowie pałaców i świątyń. W świątyniach arabskich, na przykład znajduje się półkolista nisza zwana mikrabem, w której stoi duchowny odprawiający modły. Również w kościołach katolickich ściana prezbiterium jest zaokrąglona, tworząc tak zwaną apsydę. Taka wklęsła ściana działa jak reflektor — odbija głos duchownego i kieruje go ku wiernym.



Posłuchaj bicia własnego serca

Jeśli przyłożysz rękę do serca, czujesz, jak ono bije. Towarzyszy temu cichutkie pikanie, ale za słabe, by je usłyszeć. Chyba, żeby... przyprowadzić je do ucha. Można łatwo zrobić instrument podobny do tego, jakiego używa lekarz do osłuchiwania pacjentów: stetoskop. Potrzebny jest do tego lejek i rurka gumowa.
Nałóż koniec gumki na rurkę lejka i stetoskop gotowy. Możesz przyłożyć lejek do serca, a drugi koniec rurki do ucha i posłuchać, jak bije Twoje serce.

«Małą Deltę« opracowali Przemysław Nowicki i Daria Ziemińska