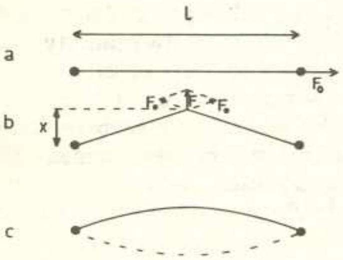
aboratorium w domu

Dr Jan A. GAJ

Jak drga struna i w czym fortepian jest lepszy od bębna?

Zanim przystąpimy do doświadczeń, spróbujmy przewidzieć teoretycznie ich wyniki. Ścisły opis wymagałby zaawansowanego aparatu matematycznego, będziemy więc musieli zadowolić się rozumowaniem nieco intuicyjnym. Rozważmy strunę na przykład w gitarze lub fortepianie. Jest ona odpowiednio napięta— przyjmijmy, że siłą F_0 a jej długość niech wynosi l (rys. 1a). Jeżeli uchwycimy ją w środku i odciągniemy nieco w kierunku prostopadłym do jej długości, powiedzmy o odcinek x, będzie wyglądała jak na rys. 1b. Jeżeli x będzie odpowiednio małe, możemy przyjąć, że zarówno siła F_0 jak i długość struny się nie zmieni. Możemy więc na podstawie podobieństwa odpowiednich trójkątów na rys. 1b napisać:



Rys. 1

$$F = F_0 \frac{2x}{\frac{1}{2}l} = 4F_0 \frac{x}{l},$$

gdzie F jest siłą z jaką odciągnęliśmy strunę. Otrzymana równość wskazuje, że ruch struny (kiedy ją puścimy) powinien być harmoniczny (siła proporcjonalna do wychylenia). Nie przejmujmy się brakiem minusa bo przecież na wychyloną strunę działa siła reakcji $-F$.
Jak pamiętamy, w ruchu harmonicznym zachodzą związki:

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x \quad \text{oraz} \quad F = -kx,$$

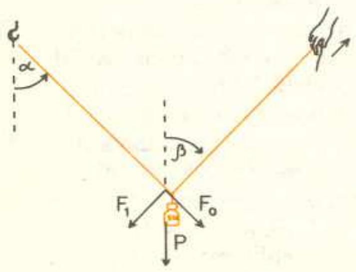
a stąd (pamiętając, że $F = m \cdot a$) mamy $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$,
gdzie k jest oczywiście współczynnikiem proporcjonalności siły do wychylenia i w naszym przypadku wynosi $\frac{4F_0}{l}$. Jeżeli mamy używać strun o różnej długości, to wygodnie jest napisać $m = \varrho l$, gdzie stała ϱ jest masą jednostki długości struny. Po podstawieniu otrzymamy ostatecznie:

$$T \sim \sqrt{\frac{\varrho l^2}{F_0}} = l\sqrt{\frac{\varrho}{F_0}}. \tag{1}$$

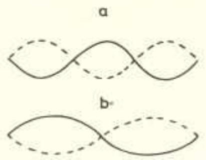
Oczywiście wyprowadzenie takie jest raczej agitacją niż dowodem, bo kształt struny w czasie drgań bardziej przypomina to, co widać na rys. 1c, niż uproszczony rys. 1b, poza tym siły i wychylenie rozważaliśmy tylko dla punktu środkowego struny, a masę wzięliśmy całej struny. Możemy z tego powodu mieć wątpliwości co do wartości liczbowych, ale kształt zależności powinien być prawidłowy. Ostatecznym kryterium — jak zawsze — musi być doświadczenie.

Badamy drgania strun

Na struny użyjemy mocnego, niezbyt cienkiego sznurka, który zaczepimy w jakimś solidnym punkcie stałym (np. hak w ścianie lub — dla szczęśliwych mieszkańców nowych mieszkań — rura pod sufitem) i obciążymy odpowiednim ciężarem (odważnik, hantla lub żelazko) a następnie będziemy pobudzać do drgań przez szarpanie. Dźwięk wydawany przez naszą strunę będzie bardzo słaby — ale to nie szkodzi. Zmieniając długość struny i ciężar odważnika możemy badać zmiany częstości tym wywołane i sprawdzać, czy zachodzi proporcjonalność (1). Siłę naciągu nitki można też zmieniać bez zmiany ciężarka — ciągnąc za wolny koniec sznurka można zmienić siłę napinającą strunę. Obliczamy ją zmierzywszy odpowiednie kąty (patrz rys. 2).



Rys. 2



Rys. 3

Praktycznie wygodnie jest starać się aby oba odcinki sznurka były prostopadłe ($\alpha+\beta = \pi/2$ — dla zmniejszenia napięcia lub $\beta = \pi/2$ — dla zwiększenia napięcia struny). Pozostaje jeszcze pytanie, jak mierzyć częstość drgań struny? Jeżeli dysponujemy jakimkolwiek instrumentem i jesteśmy w stanie identyfikować dźwięki, próbujemy za każdym razem znaleźć ton instrumentu najbliższy pod względem częstości drganiom struny. Przydać się może przy tym wiadomość, że dźwięki odpowiadające kolejnym (nieważne, białym czy czarnym) klawiszom fortepianu, a także kolejne dźwięki gitary, mają częstości w postępie geometrycznym o ilorazie $\sqrt[12]{2} \simeq 1{,}06$. Można też badać jaki jest związek między siłą a długością struny przy stałej częstości — przez doprowadzenie do rezonansu obu odcinków sznurka z rys. 2. Ze wzoru (1) wynika, że powinno być $F_0 \sim l^2$.

Powiecie: dobrze, fortepian ma struny ale

co ma z tym wspólnego bęben?

Jeżeli nie będziemy specjalnie starali się temu zapobiec, przypadkowo pobudzona struna będzie zazwyczaj wykonywała jednocześnie drgania podstawowe i różne drgania harmoniczne.

Jak się zaraz dowiemy, niewiele. Zauważmy przede wszystkim, że struna może wykonywać nie tylko drgania podstawowe jak na rys. 1 ale i takie jak na rys. 3 — wyższe harmoniczne. Zwróćmy uwagę, że drgania z rys. 3a i 3b są takie, jak drgania podstawowe (bez harmonicznych) strun wykonanych z tego samego materiału, a tylko krótszych — dwukrotnie (a) lub trzykrotnie (b). Teraz dochodzi do głosu wzór (1): ze względu na proporcjonalność okresu do długości struny, częstości kolejnych możliwych drgań struny będą wielokrotnościami częstości podstawowej. Nasze ucho jest w stanie sprowadzić dźwięk struny „do wspólnego mianownika" i przyporządkować mu określoną wysokość. Na bębnach wygrać melodię jest bardzo trudno — ponieważ napięta membrana bębna nie jest tak prostym tworem jak struna i taka prawidłowość nie zachodzi — różne częstości drgań bębna nie są wielokrotnościami częstości podstawowej. Jedynie pobudzając umiejętnie membranę bębna tak, aby nie wzbudzić tonów o wyższych częstościach można wydać dźwięk, którego wysokość ucho ludzkie potrafi określić.

Jak łatwo wykazać, takie drganie złożone jest okresową funkcją czasu o częstotliwości drgania podstawowego.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej ***MĄKOWSKI***

M 82. Czy istnieje funkcja okresowa $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ (tzn. określona na zbiorze liczb rzeczywistych i o wartościach rzeczywistych), dla której każda liczba wymierna jest okresem, a żadna liczba niewymierna okresem nie jest?
A jaka będzie odpowiedź, gdy zażądamy, by każda liczba niewymierna była okresem, a żadna liczba wymierna (różna od zera) nie była okresem?
Rozwiązanie na str. 7.

M 83. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \cos x + \cos ax$, gdzie a jest liczbą niewymierną, nie jest okresowa.
Rozwiązanie na str. 16.

M 84. Udowodnić, że jeżeli $0 < \alpha < \pi$, to $f(\alpha) = \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha > 0.$

Rozwiązanie na str. 16.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 28. Zaproponowano przeprowadzenie doświadczenia mającego na celu demonstrację prążków interferencyjnych Younga w następujących warunkach (patrz rysunek obok):
Spójne światło z silnego źródła przechodzi przez wąską szczelinę i następnie oświetla dwie wąskie szczeliny, odległe od siebie o $a = 1$ mm i o $d = 10$ cm od pierwszej szczeliny. Białe światło ze źródła przechodzi przez filtr przepuszczający tylko pasmo światła o długości między $\lambda_1 = 4800$ Å a $\lambda_2 = 5200$ Å. Prążki interferencyjne są obserwowane na ekranie odległym od szczelin o $D = 1$ m.
Oceńcie:
a. Jak będą rozseparowane prążki na ekranie i ile spośród nich powinno być dobrze widocznych.
b. Jaka jest dopuszczalna szerokość pierwszej szczeliny, żeby źródło światła można było uważać za spójne.
c. Jak zmieni się obraz interferencyjny, jeżeli przed jedną z dwóch szczelin umieści się (od strony źródła) równoległą płytkę szklaną o grubości $h = 0{,}2$ mm i o współczynnikach załamania: $n_1 = 1{,}664$ dla $\lambda_1 = 4800$ Å, $n_2 = 1{,}656$ dla $\lambda_2 = 5200$ Å.
Rozwiązanie na str. 17.