

Mgr *Wacław FRYDRYCHOWICZ*



Rozwiązanie zadania M 79.

Jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 3 i różną od 5, to jest postaci $n = 2k$ lub $n = 2k + 3$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od 1. Niech będzie dany trójkąt ABC . Na bokach AB i AC obrzemy odpowiednio punkty D i E tak, aby $BD = \frac{1}{k} AB$, $CE = \frac{1}{k} CA$, a bok BC podzielmy na k równych części.

Przez każdy punkt podziału prowadzimy do przecięcia z DE odcinki równoległe do AB i AC . Otrzymujemy w ten sposób podział trójkąta na $2k$ trójkątów do niego podobnych. Łącząc ponadto środki odcinków AD , DE i EA otrzymujemy podział trójkąta ABC na $2k + 3$ trójkąty do niego podobne.

„Fale sejsmiczne niosą informacje o własnościach fizycznych ośrodka, o defektach występujących w jego strukturze i o nieciągłościach parametrów sprężystych we wnętrzu Ziemi” pisał rok temu («Delta» 1975, nr 1) A. Guterch w swym artykule o badaniach nad głęboką strukturą Ziemi. W sejsmologii wnioskowanie o strukturze niedostępnych bezpośrednio badaniu geologicznemu obszarów wnętrza Ziemi odbywa się z grubsza mówiąc, według następującego schematu: „gdyby Ziemia była jednorodnym ośrodkiem sprężystym, to potrafilibyśmy przewidzieć, jaki będzie obraz drgań wywołanych np. wybuchem na sejsmografie odległym o tyle a tyle od punktu, w którym te drgania zostały wywołane. Wszelkie odchylenia obrazu zarejestrowanego przez sejsmograf od obrazu idealnego świadczą o niejednorodnościach ośrodka; charakter tych odchylenia pozwala ustalić, jakie to mogą być niejednorodności”.

Umiejętność odczytania informacji niesionych przez fale sejsmiczne wymaga więc znajomości teorii rozchodzenia się drgań w ośrodku sprężystym. Zajmiemy się tym właśnie zagadnieniem. Dla każdego ośrodka sprężystego można podać charakterystyczne dla niego parametry. Nazywamy je *stałymi materiałowymi*. Jeśli ośrodek jest jednorodny (gęstość jego jest stała) oraz izotropowy (sposób rozchodzenia się fal jest jednakowy w każdym kierunku), to własności sprężyste tego ośrodka można w pełni scharakteryzować przez podanie dwu tylko stałych materiałowych: modułu Younga E i współczynnika Poissona ν (oraz gęstości ρ). Moduł Younga ma, jak wiadomo, wymiar kg/cm^2 , ν jest wielkością bezwymiarową, spełniającą teoretycznie nierówność $0 < \nu < 1/2$. Eksperymentalnie stwierdzono, że współczynnik Poissona zawarty jest na ogół w przedziale $(1/4, 1/2)$. Często posługujemy się innymi stałymi materiałowymi λ i μ , zwanymi stałymi Lamégo. Są one związane z E i ν następująco:

$$E = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Stale λ i μ są dodatnie dla każdego ośrodka sprężystego i — jak wynika z powyższych związków — w pełni charakteryzują dany jednorodny i izotropowy ośrodek sprężysty.

Przypuśćmy teraz, że mamy do czynienia z nieograniczonym we wszystkich kierunkach ośrodkiem sprężystym i że w pewnym jego punkcie wywołane zostało zaburzenie, powodujące przemieszczenie (zmiennie w czasie) pewnego punktu. Z przemieszczeniem się tego punktu będą związane oczywiście zmiennie w czasie przemieszczenia punktów niezbyt odległych. Przemieszczenie punktów wypełniających początkowo pewien obszar zwany w tej teorii konfiguracją będzie oznaczało odkształcenie się tego obszaru: może zmienić się zarówno kształt jak i objętość. Łatwo zauważyć, że każde odkształcenie można rozłożyć na dwie „składowe”: odkształcenie czysto postaciowe (zmiana kształtu bez zmiany objętości) i odkształcenie czysto objętościowe (zmiana objętości bez zmiany kształtu — podobieństwo). Oczywiście lokalne odkształcenie ośrodka będzie powodowało również przemieszczenia punktów coraz dalej położonych od początkowego zakłócenia, odkształcenia obszarów coraz bardziej odległych: zaburzenie spowoduje rozchodzenie się w ośrodku fal sprężystych.

Ten uproszczony obraz pozwala przewidywać, że znajomość związków pomiędzy przemieszczeniami punktów ośrodka, działającymi w ośrodku siłami i parametrami charakteryzującymi ośrodek, oraz zależność tego wszystkiego od czasu powinny umożliwić przewidywanie przebiegu rozchodzenia się zaburzeń w ośrodku. I tak rzeczywiście jest. W analizie teoretycznej rozchodzenia się fal w ośrodku sprężystym wychodzi się z tzw. równań Naviera (równań przemieszczeniowych). Aby je napisać, identyfikuje się ośrodek z kartezjańską przestrzenią trójwymiarową o osiach współrzędnych x_1, x_2, x_3 . Jeśli przez $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ oznaczyć początkowe położenie pewnego punktu ośrodka w chwili t_0 , a przez $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ położenie tego samego punktu w chwili t , to

$$\mathbf{X} - \hat{X} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$$

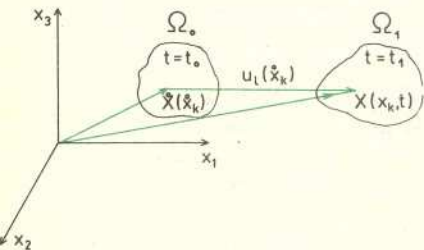
będzie wektorem przemieszczenia tego punktu. Przemieszczenie to zależy nie tylko od czasu, ale i od położenia początkowego. Jeśli więc przyjąć

$$x_i = x_i(\hat{X}, t) = x_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, t)$$

$$u_l = x_l(\hat{X}, t) - \hat{x}_l \quad \text{dla } l = 1, 2, 3,$$

a więc każda składowa przemieszczenia jest funkcją czterech zmiennych (trzy współrzędne i czas). Zakłada się przy tym, że przemieszczenie \mathbf{U} jest zawsze związane z działaniem tzw. sił masowych, których wielkość również zależy od położenia punktu i od czasu. Siły masowe oznaczamy symbolem \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3).$$



Ω_0 — konfiguracja początkowa w chwili $t = t_0$ (stan przed odkształceniem ośrodka)

Ω_1 — konfiguracja w chwili $t = t_1$ (stan po odkształceniu ośrodka)

Wartość współczynnika n równa $\frac{1}{2}$ oznacza,

że prędkość fazowa emitowanej fali elektromagnetycznej w jonosfere jest większa niż c (równa $2c$). Ale z teorii względności wiemy, że sygnały nie mogą się rozchodzić z prędkością większą niż c . Na szczęście otrzymany wynik nie jest sprzeczny z teorią względności. Prędkości fazowe mogą przekraczać c . Ograniczenie dotyczy tzw. „prędkości grupowej” fali, która dla fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w próżni, równa jest prędkości fazowej fali. Niestety ramy tego działu nie pozwalają na opisanie różnicy tych dwóch wielkości. Zainteresowanych odsyłamy do książki F. C. Crawforda „Fale” (PWN — 1972). Warto jeszcze zauważyć, że w rzeczywistości wartość n silnie zależy od częstości fal radiowych i jest większa od jedności dla $\nu_0 \geq 50$ MHz.

Teraz możemy już napisać równania Naviera. Mają one postać

$$(1) \quad \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \rho P_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

dla $i = 1, 2, 3$. Postać (1) jest skomplikowana. Dla ułatwienia życia w mechanice często wprowadza się różne umowy upraszczające zapisywanie wzorów:

— pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ oznacza się symbolem $f_{,j}$ (a więc np. $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$ zapisuje się jako $u_{i,jj}$);

— pochodną cząstkową względem czasu oznacza się kropką nad funkcją różniczkowaną (a więc np. \ddot{u}_i oznacza $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$);

— wprowadza się ponadto tzw. konwencję sumacyjną polegającą na tym, że opuszcza się znak sumy, pozostawiając go domyślności czytelnika wszędzie tam, gdzie w jednomianie występuje dwa razy ten sam wskaźnik. Na przykład wzór

$$(*) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

nie ma sensu bez domyślnego znaku sumy, który występuje po stronie prawej; w konwencji sumacyjnej równość (*) oznacza

$$(**) \quad df = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Po zastosowaniu tych umów do równań (1) możemy przepisać je w postaci (pozornie) prostszej:

$$(2) \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho P_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Jak mówiliśmy, równania Naviera opisują związek między własnościami materiału, przemieszczeniami i działającymi siłami masowymi a położeniem punktu i czasem. Nie będziemy tu zajmowali się wyprowadzaniem i interpretacją tych równań. Do naszych celów wystarczy bowiem wiedzieć, że z dobrym przybliżeniem opisują one zachowanie się rzeczywistych izotropowych i jednorodnych ośrodków sprężystych.

Wyprowadzenie z (2) równań opisujących rozchodzenie się fal sprężystych jest dość proste — jeśli zastosować pewne dodatkowe triki techniczne. Okazuje się mianowicie, że można tak wprowadzić cztery pomocnicze funkcje φ i ψ_1, ψ_2, ψ_3 , by spełnione były związki:

$$(3) \quad u_k = \varphi_{,k} + \varepsilon_{klm} \psi_{l,m}, \quad k, l, m = 1, 2, 3$$

pamiętamy o konwencji sumacyjnej!), gdzie

$$\varepsilon_{klm} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \langle k, l, m \rangle \text{ jest parzystą permutacją liczb } 1, 2, 3, \\ 0 & \text{gdy jakieś dwie z liczb } k, l, m \text{ są równe,} \\ -1 & \text{gdy } \langle k, l, m \rangle \text{ jest nieparzystą permutacją liczb } 1, 2, 3; \end{cases}$$

przy tym

$$(4) \quad \psi_{l,l} = 0.$$

Zarówno funkcja φ , jak i trójka funkcji (ψ_1, ψ_2, ψ_3) mają dobrze określone interpretacje fizyczne. Pierwsza z nich, zwana potencjałem skalarnym, charakteryzuje odkształcenia objętościowe, natomiast $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ nazywa się potencjałem wektorowym i charakteryzuje odkształcenia postaciowe.

Podobny zabieg można również zastosować do wektora sił masowych: tak dobiera się funkcje Φ i $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$, by były spełnione związki

$$(5) \quad P_k = \Phi_{,k} + \varepsilon_{klm} \Psi_{l,m}, \quad k, l, m = 1, 2, 3$$

(interpretacji Φ i Ψ nie omawiamy).

Podstawiając związki (3) i (5) do równań Naviera (2), otrzymamy następujące zależności:

$$(6) \quad [(\lambda + 2\mu)\varphi_{,jj} + \rho\Phi - \rho\dot{\varphi}]_{,k} + \varepsilon_{klm}[\mu\psi_{l,jj} + \rho_1\ddot{\psi} - \rho_2\dot{\psi}]_{,m} = 0.$$

Ponieważ funkcje φ i ψ_k są niezależne, więc równanie (6) jest spełnione gdy oba wyrażenia w nawiasach oddzielnie równają się zeru.

Otrzymamy wtedy następujące równania:

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi} &= -\Phi, \\ \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \psi_i - \ddot{\psi}_i &= -\Psi_i, \end{aligned}$$

gdzie symbol ∇^2 zastępuje operator różniczkowy postaci

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Własność (4) jest równoważna stwierdzeniu, że dla dowolnej powierzchni zamkniętej suma (po wszystkich elementach powierzchni) rzutów odkształceń elementów tej powierzchni opisywanych przez potencjał wektorowy na kierunku prostopadłe do tych elementów (zwrot prostopadłej wybieramy na zewnątrz powierzchni) jest równa zeru. Podobnie fakt, że odkształcenie opisywane potencjałem skalarnym jest dane przez gradient potencjału ($\varphi_{,k}$), jest równoważny stwierdzeniu, że suma takich odkształceń wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej jest równa zeru.

Oznaczając

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

W przypadku jednowymiarowym rozwiązaniem równania jednorodnego bez sil masowych

$$c_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

jest funkcja

$$\varphi(x, t) = A \sin \frac{\omega}{c} (x - ct) \quad (\text{sprawdźcie!})$$

opisująca rozchodzenie się fali o amplitudzie A (dowolnej) i częstotliwości ω (dowolnej) w dodatnim kierunku osi x z prędkością c .

równanie (7) możemy zapisać następująco:

$$(8.1) \quad c_1^2 \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi} = -\Phi,$$

$$(8.2) \quad c_2^2 \nabla^2 \psi_i - \ddot{\psi}_i = -\Psi_i.$$

Ostatnie równania nazywamy falowymi. Równanie (8.1) charakteryzuje falę rozchodzącą się z prędkością c_1 . Nazywamy ją falą podłużną, albo falą P. Fala ta opisuje rozprzestrzenianie się odkształcenia objętościowego. Z równania (8.2) wynika, że częstotliwość przemieszczenia odpowiadająca funkcji ψ_i przenosi się z mniejszą prędkością c_2 . W sejsmologii fala rozchodząca się z prędkością c_2 nazywana jest falą poprzeczną albo falą S. Z prędkością c_2 rozchodzą się odkształcenia czysto postaciowe. Z określenia c_2 wynika, że jeżeli $\mu = 0$, to $c_2 = 0$. Oznacza to, że fala S nie może się rozchodzić w ośrodku charakteryzującym się zerową sztywnością na odkształcenia postaciowe. W sejsmologii przyjmuje się $\lambda = \mu$, co odpowiada przyjęciu wartości $\nu = \frac{1}{4}$. W nieskończonym, jednorodnym i izotropowym ośrodku sprężystym każde zaburzenie daje się przedstawić za pomocą superpozycji fal P i fal S. Jeżeli jednak ciało jest ograniczone albo niejednorodne, to wzbudzone są w nim również inne typy fal. (Najważniejszymi z nich są fale powierzchniowe, które rozprzestrzeniają się w pobliżu granicy). W tablicy poniżej podajemy prędkości c_1 i c_2 dla kilku ośrodków sprężystych.

Ośrodek	Aluminium	Miedź	Stal	Ołów
c_1 [m/s]	$6,32 \cdot 10^3$	$4,36 \cdot 10^3$	$5,80 \cdot 10^3$	$2,14 \cdot 10^3$
ν	0,345	0,343	0,290	0,441

$$\text{prędkość } c_2 \text{ można wyliczyć ze wzoru: } c_2^2 = c_1^2 \cdot \frac{1-2\nu}{2-\nu}$$



Rozwiązanie przykładu 2 z zadania F 27.

Wprowadzamy oznaczenia tak, jak zaznaczono na rysunku 1, gdzie s oznacza najmniejszą odległość satelity od punktu obserwacyjnego, v jego prędkość, a α_t — kąt jaki tworzy trajektoria satelity z kierunkiem jego obserwacji w momencie dokonywania t -tego pomiaru częstotliwości sygnałów.

Zachodzi oczywisty związek:

$$(1) \quad \operatorname{ctg} \alpha_t = \frac{-v(t-t_0)}{s},$$

gdzie t_t oznacza czas t -tej obserwacji, a t_0 odpowiada chwili czasu, kiedy satelita znajduje się najbliżej punktu obserwacyjnego ($t_t = 0$).

Na obserwowaną zmianę częstotliwości sygnałów wpływa jedynie składowa prędkości satelity równoległa do kierunku obserwacji (przypadek nierelatywistyczny). Dlatego:

$$(2) \quad v_t = v_0 \frac{1}{1 - \frac{v \cos \alpha_t}{c}} \approx v_0 \left(1 + \frac{v \cos \alpha_t}{c} \right),$$

gdzie v_t i v_0 są odpowiednio obserwowaną i emitowaną częstotliwością sygnałów.

Eliminując kąt α_t z wzorów (1) i (2) otrzymujemy:

$$(3) \quad \frac{v_t - v_0}{v_0} = \frac{-\frac{v}{c} \cdot \frac{v}{s} \cdot (t-t_0)}{\left(1 + \frac{v^2}{s^2} (t-t_0)^2 \right)^{1/2}}$$

Wielkościami niewiadomymi we wzorze (3) są: t_0 , v_0 , v i s .

Należy zauważyć, że teoretycznie wielkości s i v nie są niezależne. Bowiem w ruchu satelity dookoła Ziemi siłą dośrodkową odpowiedzialną za jego ruch jest siła powszechnego ciężenia. Stąd natychmiast wynika związek:

$$(4) \quad v = \sqrt{g^R \left(1 - \frac{s}{R} \right)},$$

gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym ziemskim, a R promieniem Ziemi. Ponieważ na ogół $s \ll R$, wartość v jest nieco mniejsza od pierwszej prędkości kosmicznej równej $7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Dla dużych $|t_t - t_0|$ prawa strona wzoru (3) jest

w przybliżeniu równa swojej granicy przy $|t_t - t_0| \rightarrow \infty$. Korzystając z tego otrzymujemy dla v_0 przybliżoną wartość 40,00129 MHz. Natomiast rozważając wzór (3) dla $|t_t - t_0| \approx 0$ możemy ocenić wartość t_0 otrzymując w przybliżeniu 87 s ($t_t = 0$). Wartość s wynosi około 420 km, a tym samym $v \approx 7,65 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Czytelników zachęcamy do

dokładniejszego dopasowania parametrów t_0 , v_0 i s metodą iteracyjną do wartości v_t podanych w zadaniu. Na wysokości 420 km atmosfera jest tak rozrzedzona, że współczynnik załamania jest dla niej praktycznie równy jedności. Czytelnicy, którzy rozwiązali pierwszy przykład niniejszego zadania mogą mieć jednak wątpliwości, czy różne od jedności współczynniki załamania niższych warstw atmosfery nie odgrywają roli w rozwiązaniu. Otóż nie. Współczynnik załamania dla środowiska, w którym porusza się satelita można uznać za równy jedności ($s \approx 400 \text{ km}$), a niższe warstwy atmosfery nie zmieniają częstotliwości emitowanych fal.

