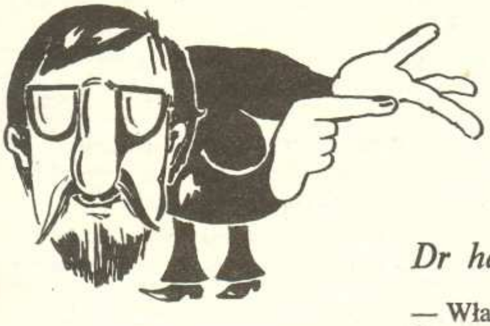
Kombinatoryka i boisko



Dr hab. Wiktor MAREK

— Właściwie to ja bardziej lubię grać w siatkówkę niż pić piwo, powiedział Staszek do kolegów rozpinając ortalionową wiatrówkę i grzejąc twarz w ostrych promieniach marcowego słońca.
— Ba, każdy woli, — mruknął Kazik.
— No właśnie, jest nas sześciu, Janek, Piotr I, Piotr II, Kazik, Bronek no i ja. Gdybyśmy mieli boisko do siatkówki, to byłaby z nas nawet niezła drużyna.
— Pewnie.
— Ale gdzie grać?
— Na podwórku u Piotra I jest kawałek ziemi, który by się nadał na boisko. Ale trzeba by nad nim popracować, zrobić różne rzeczy: splantować teren, wykopać doły pod słupy, zrobić te słupy, nawieźć ziemi, zrobić wał żeby była trybuna — dziewczynom też się coś należy — no i zebrać butelki po wódce — jak je sprzedamy to będą pieniądze na siatkę i piłkę.
— Chłopaki z Ogrodowej będą nam zazdrościć.
— Ale grać przyjdą.
— Pewnie, ale jak już będzie gotowe.
— No to może Janek, Piotr II i Bronek splantują tę ziemię — powiedział Staszek, — a ja z Piotrem I i Kazikiem wykopię doły.
— Kto zrobi słupy?
— Ja — krzyknął Bronek, — ale nie sam.
— No pewnie, — powiedział Staszek, — pomożemy ci z Piotrem II.
— Do wożenia ziemi to ja się nadam — dodał Piotr II, — mam starą taczkę w piwnicy.
— I ja, i ja — krzyknęli Janek i Piotr I.
— A ten wał to już my ubijemy z Piotrem i Kazikiem — powiedział Staszek.
— Przecież już razem kopiecie doły.
— A co, nie można?
— No, zostają już tylko te butelki, ale to proste — rzekł Janek — ja sam pochodzę koło zsypów.
— Dobrze, możemy pójść razem — rzekł Bronek.
— Tylko, że ktoś powinien być odpowiedzialny za każdą robotę.
— I za różne kto inny.
— No pewnie, niech się chłopaki męczą — rzekł Piotr II.
— Ciebie też nie minie.
— A co, wykręcam się?
— Bardzo skomplikowana sprawa.
— Co?
— No wybór tych odpowiedzialnych.
— E, tam — rzekł Bronek — ja zorganizuję równanie boiska.
— A ja zajmę się tymi dołami — powiedział Piotr I.
— No to ja będę doglądać słupów — dodał Piotr II.
— Więc ja muszę się wziąć za taczki — rzekł Janek.
— Klops.
— Co klops.
— Kto zajmie się szkłem?
— A rzeczywiście, albo Janek zostawi taczki, albo Bronek równanie boiska.
— Wy tak na siłę, a tu sposobem trzeba.
— Już mam, — powiedział Staszek i zaczął coś kreślić patykiem na piasku.
— To będzie tak: Równanie zorganizuje Bronek, kopanie dołów ja sam, słupami zajmie się Piotr II, wożeniem ziemi Piotr I, Kazik wałem, a szkłem Janek. Dobrze?
— Pewnie — krzyknęli chłopcy i pobiegli wypić ostatnie piwo przed zajęciem się czymś pożytecznym.

Rozwiązanie zadania **M 80**.

Przypuśćmy, że dla pewnych liczb naturalnych x_1, x_2, y_1, y_2 zachodzą związki $x_1!+y_1! = x_2!+y_2!$, $x_1 \leqslant y_1$, $x_2 \leqslant y_2$, $x_1 < x_2$. Wówczas zachodzi też nierówność $y_1 > x_2$, gdyż w przeciwnym przypadku byłoby $x_1!+y_1! < x_2!+x_2! \leqslant x_2!+y_2!$ co przeczyłoby równości $x_1!+y_1! = x_2!+y_2!$
Ponieważ jest $x_2 \leqslant y_2$, $x_2 < y_1$, więc liczba $x_2!+y_2!-y_1! = x_1!$ dzieli się przez $x_2!$, co jest niemożliwe, gdyż $x_1 < x_2$.
Przypuszczenie nasze jest więc fałszywe a więc nie istnieją liczby, które można dwoma sposobami przedstawić w postaci $x!+y!$

Symbol $|A|$ oznacza ilość elementów zbioru A.

Rozwiązanie przykładu 1 z zadania **F27**
Zachodzi następujący związek między częstością fali emitowanej ν_0 i częstością obserwowaną ν:

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1+\frac{v}{v_f}}, \tag{1}$$

gdzie v jest prędkością oddalającej się rakiety ($v > 0$), a v_f prędkością fazową fali elektromagnetycznej w środowisku, w którym następuje emisja ($v_f = \nu_0 \lambda$, gdzie λ jest długością fali w danym środowisku).
Oczywiście $v_f = \frac{c}{n}$, gdzie c jest prędkością fali elektromagnetycznej w próżni, a n współczynnikiem załamania środowiska.
Ponieważ $v \ll v_f$ wzór (1) możemy przepisać w postaci:

$$\nu \simeq \nu_0 \left(1-\frac{v}{v_f}\right) = \nu_0 \left(1-n\frac{v}{c}\right).$$

Stąd:

$$|\nu-\nu_0| = n\nu_0 \frac{v}{c}. \tag{2}$$

Częstość występowania wzmocnień w aparaturze odbiorczej oczywiście odpowiada różnicy $\nu-\nu_0$. Podstawiając znane wartości liczbowe do wzoru (2) otrzymamy dla n wartość $\frac{1}{2}$.
Czy wartość współczynnika n mniejsza od jedności nie niepokoi Was, Czytelnicy? Zaniepokojonych odsyłamy do str. 13.

Kłopot kolegów rozwiązany, ale zobaczmy, jak można go uogólnić, tak by stał się interesującym problemem matematycznym.
A więc mamy zbiór X (to nasi koledzy z podwórka) i ciąg jego — niekoniecznie różnych — podzbiorów $X_1, \ldots, X_n$(X_1 to zbiór kolegów, którzy splantują teren, X_2 to zbiór złożony z tych, co zrobią słupy itd). Teraz każdemu ze zbiorów $X_1, \ldots, X_n$ chcemy tak przyporządkować jego element (to właśnie odpowiedzialny za pracę), który nazwiemy *reprezentantem*, by różnym wyrazom ciągu przypisane były różne elementy (choć same wyrazy mogą czasem się powtarzać).
Jeśli więc mamy taki ciąg $\langle\langle X_1, a_1 \rangle, \ldots \langle X_n, a_n \rangle\rangle$, że $a_i \in X_i$ oraz $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$ to nazwiemy go *selektorem* dla rodziny $\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$.
A więc kiedy uporządkowana rodzina $\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ ma selektor? Bez trudu przekonujemy się, że dla każdej liczby $k \leqslant n$ złączenie (suma teoriomnogościowa) dowolnych k spośród zbiorów naszej rodziny $X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \ldots < i_k$) musi zawierać co najmniej k elementów.

(Mamy bardzo prostą interpretację na naszym przykładzie: Jeśli wzięliśmy jakiekolwiek cztery spośród naszych zbiorów, to ich złączenie zawierać musi co najmniej cztery osoby, mianowicie odpowiedzialnych).
Znacznie mniej oczywistą rzeczą jest to, że wskazany warunek konieczny jest też i dostateczny. Twierdzenie powyższe nazywa się twierdzeniem Halla.

Twierdzenie Halla: Na to, by uporządkowana rodzina $\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ miała selektor, potrzeba i wystarcza by dla każdego $k \leqslant n$ i dowolnego ciągu $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$:

$$\left|\bigcup_{j=1}^{k} X_{i_j}\right| \geqslant k.$$

Interesującym, a mniej nieco znanym faktem jest to, że można podać algorytm konstrukcji selektora. Algorytm ten konstruuje selektor (o ile selektor istnieje). Opiszemy go poniżej. Bez trudu możemy założyć, że nasz zbiór X składa się z liczb. Jeśli liczy on m elementów, to możemy założyć, że jest on po prostu zbiorem $\{1, \ldots, m\}$.
Zatem wypisując elementy zbiorów $X_1, \ldots, X_n$ po kolei mamy

$$X_1 = \{j_1^1, \ldots, j_{r_1}^1\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_n = \{j_1^n, \ldots, j_{r_n}^n\}.$$

Zaczynamy

od tego, że ze zbioru X_1 wybieramy j_1^1 i parę $\langle X_1, j_1^1\rangle$ nazywamy chwilowym selektorem dla zbioru X_1. Parę tę notujemy na specjalnej kartce noszącej tytuł „*Selektor chwilowy*". Na kartce tej będzie do tego momentu stale wypisany ciąg

$$\langle X_1, a_1\rangle, \langle X_2, a_2\rangle, \ldots, \langle X_k, a_k\rangle,$$

(oczywiście najpierw jednoelementowy) zwany selektorem chwilowym rodziny $\langle X_1, \ldots, X_k\rangle$ (też najpierw jednoelementowej).

□

Sprawdzamy teraz, czy k jest równe n.

Jeśli tak,
to na kartce „*Selektor chwilowy*" wycieramy słowo „*chwilowy*" i kończymy pracę.

Jeśli nie
czyli $k < n$, to mamy jedną z dwu sytuacji:

Albo
w zbiorze X_{k+1} jest liczba nie występująca w zbiorze $\{a_1, \ldots, a_k\}$ — patrz „*Selektor chwilowy*". Wówczas selektor chwilowy przedłużamy dopisując na końcu parę

$$\langle X_{k+1}, b\rangle$$

gdzie b jest najmniejszą z liczb ze zbioru

$$X_{k+1} - \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Zastępujemy też k przez $k+1$ i wracamy do □.

Albo
$X_{k+1} \subset \{a_1, \ldots, a_k\}$. Bierzemy wtedy nową kartkę, na której wypisujemy elementy zbioru X_{k+1} w pionowych kreskach, a pod spodem piszemy $\ast$.
Mamy więc napis

$$\underbrace{\left| j_1^{k+1}, \ldots, j_{r_{k+1}}^{k+1} \right|}_{\ast}$$

Napis na tej kartce nazwiemy *listą*, a jej części pomiędzy kreskami — *sektorami* (będzie ich potem więcej).

□□
Mamy więc *listę* podzieloną na *sektory*, powiedzmy $S_1, \ldots, S_t$. Bierzemy teraz pierwszą z liczb naszej *listy*, nad którą nie ma kreski, niech będzie to y (na początku wcale nie ma kresek, więc bierzemy po prostu pierwszą liczbę z *listy*).

Rozwiązanie zadania M 81.

Załóżmy, że k jest pierwiastkiem każdego z danych równań, a więc że zachodzą równości

$$ak^2+bk+c=0,$$
$$ck^2+bk+a=0.$$

Odejmując je stronami otrzymujemy $(a-c)k^2-(a-c)=0$, co wobec $a \neq c$ daje $k^2=1$ czyli $k=\pm1$. Podstawiając tę wartość k do któregoś z równań otrzymujemy $a+b+$ $+c=0$ czy $a+c=\mp b$ skąd $|a+c|=|b|$. Załóżmy teraz, że $|a+c|=|b|$ czyli $a+c=$ $=\mp b$ skąd $a\pm b+c=0$. Oznacza to, że jedna z liczb 1 i -1 jest wspólnym pierwiastkiem obydwu równań.

Gdy takiej liczby nie ma,
stwierdzamy: „Rodzina $\langle X_1, ..., X_n\rangle$ nie ma selektora" i kończymy pracę.

W przeciwnym razie
piszemy nad y kreskę i znów mamy do czynienia z jedną z dwóch sytuacji:

Albo
y należy do $\{a_1, ..., a_n\}$ — patrz „*Selektor chwilowy*". Wtedy y jest reprezentantem któregoś ze zbiorów $X_1, ..., X_k$ (i tylko jednego). Niech zbiorem tym będzie X_u. Wówczas powiększamy listę o nowy sektor, pod którym piszemy y (tak, jak pod pierwszym napisaliśmy $\divideontimes$). Nowy *sektor* tworzą liczby które należą do X_u i nie należą do żadnego z wypisanych już *sektorów*, a więc elementy zbioru

$$X_u-(S_1 \cup ... \cup S_t).$$

Gdy $X_u \subset S_1 \cup ... \cup S_t$ dopisany *sektor* będzie wyglądał tak $\underbrace{\qquad}_{y}$

Zamiast t bierzemy teraz $t+1$ (tyle mamy *sektorów*) i wracamy do □□

Albo
y nie należy do $\{a_1, ..., a_k\}$.

□□□
y jest na *liście* w jakimś i tylko jednym sektorze, pod którym, co więcej, jest coś napisane, powiedzmy m.

Teraz w „*Selektorze chwilowym*"

gdy m $= \divideontimes$
dopisujemy na końcu $\langle X_{k+1}, y\rangle$, bierzemy jako k liczbę $k+1$ (tak długi mamy już selektor), wyrzucamy kartkę z *listą* i wracamy do □;

gdy m $\neq \divideontimes$
dla pewnego $i \leqslant k$ jest $m=a_i$. Wówczas zamieniamy napis $\langle X_i, a_i\rangle$ na napis $\langle X_i, y\rangle$, bierzemy jako y liczbę m i wracamy do □□□.

Teraz trzeba już tylko uzasadnić, że nasz program wydrukuje selektor dla rodziny $\langle X_1, ..., X_n\rangle$ (o ile istnieje, a więc jeśli warunek Halla jest spełniony). Przypuśćmy przeciwnie: nie udało nam się utworzyć selektora. Stanie się tak wtedy gdy byliśmy w punkcie □□, ale nad wszystkimi elementami listy były kreski. Zatem na wypisanej liście pojawiły się wyłącznie elementy ze zbioru $\{a_1, ..., a_k\}$ (dlaczego?), choć może nie wszystkie. Powiedzmy — w liście naszej wypisaliśmy $a_{i_1}, ..., a_{i_w}$. Każdy z nich jest reprezentantem któregoś spośród zbiorów $X_1, ..., X_k$, mianowicie a_{i_1} reprezentuje X_{i_1}, a_{i_w} reprezentuje X_{i_w}. Ale jeśli a_i występuje w liście, to całe X_i zostanie wypisane w liście. Istotnie, to co nie zostało wypisane do sektora pod którym jest wypisana a_i, zostanie wypisane w tym sektorze. A więc w naszej liście wypisaliśmy $w+1$ zbiorów: X_{k+1}a potem $X_{i_1}, ..., X_{i_w}$. Jednakowoż ich suma liczy w elementów przecząc warunkowi Halla.

A więc wykazaliśmy skuteczność naszego algorytmu.

Ale udowodniliśmy po drodze istotne wzmocnienie twierdzenia Halla:
Jeśli $\langle X_1, ..., X_n\rangle$ jest rodziną spełniającą warunek Halla, $k \leqslant n$ i $\langle\langle X_1, a_1\rangle, ..., \langle X_k, a_k\rangle\rangle$ jest selektorem dla rodziny $\langle X_1, ..., X_k\rangle$, to istnieje taki selektor
$\langle\langle X_1, b_1\rangle, ..., \langle X_n, b_n\rangle\rangle$ dla rodziny $\langle X_1, ..., X_n\rangle$, że $\{a_1, ..., a_k\} \subset \{b_1, ..., b_n\}$.
A więc jeśli mamy wybranych odpowiedzialnych za pierwszych k zadań, to możemy tak wybrać odpowiedzialnych za wszystkie zadania, że obrani do tej pory będą odpowiedzialnymi (choć może za inne zadania).
A dowód tego wzmocnienia? Po prostu podłączamy do naszego programu selektor $\langle\langle X_1, a_1\rangle$, $..., \langle X_k, a_k\rangle\rangle$ i startujemy z punktu □. No, ale to już inna sprawa.
Zauważmy wreszcie, że Staszek — prawdopodobnie — znał nasz algorytm. Jeśli bowiem zastosujecie nasz program do rodziny:
$\langle\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 5\}\rangle$ to otrzymacie selektor
$\langle\langle\{1, 3, 5\}, 5\rangle, \langle\{2, 4, 6\}, 6\rangle, \langle\{3, 5, 6\},\rangle \langle 3, \{1, 2, 3\}, 2\rangle, \langle\{2, 4, 6\}, 4\rangle, \langle\{1, 5\}, 1\rangle\rangle$.

Życzę wesołego sprawdzania!

Dociekliwy Czytelnik «Delty» spyta, czy twierdzenie Halla ma i inne zastosowanie — oprócz wspomnianego wyżej. Otóż nie ma co ukrywać, ma. Zarówno w technice, na przykład w nowoczesnych centralach telefonicznych (tak, tak), oraz oczywiście do różnych problemów matematycznych, zawsze tam, gdzie zachodzi potrzeba wyboru bez powtórzeń, sortowania etc. Do twierdzenia Halla redukuje się wiele problemów — szczególnie w teorii grafów, a nikogo chyba nie trzeba przekonywać, że ta teoria ma zastosowania w technice (szczególnie w elektronice), fizyce i innych dziedzinach.