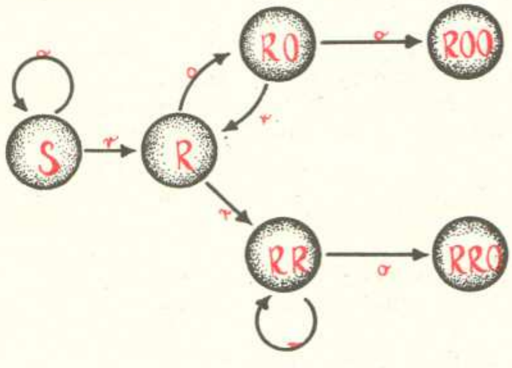
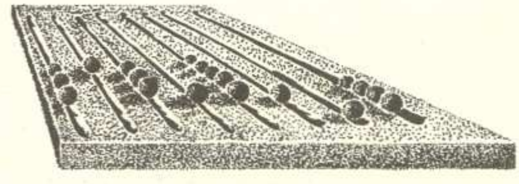
mała delta

Probabilistyczny Abak



Kto czytał poprzedni numer Małej Delty może się zorientować, że graf na rysunku obok odpowiada grze opisanej w zadaniu 1. Można jednak zapomnieć o tamtej grze i wykorzystać graf do gry następującej (w rzeczywistości jest to ta sama gra). Umieszczamy pionek w miejscu oznaczonym literą S. Z punktu S wychodzą dwie strzałki — jedną z nich oznaczyliśmy literą *r* (prowadzi ona do miejsca oznaczonego literą R), drugą oznaczyliśmy literą *o* (prowadzi ona z powrotem do miejsca S). Rzucamy monetą. Jeśli wypadł orzeł przesuwamy pionek tak jak nakazuje strzałka *o*, jeśli reszka — przesuwamy pionek po strzałce *r*. Podobnie postępujemy z pionkiem w innych miejscach naszego grafu. Gra kończy się z chwilą, kiedy pionek zawędruje do miejsca ROO (wygrywa wówczas pierwszy gracz) lub do miejsca RRO (wygrywa gracz drugi).

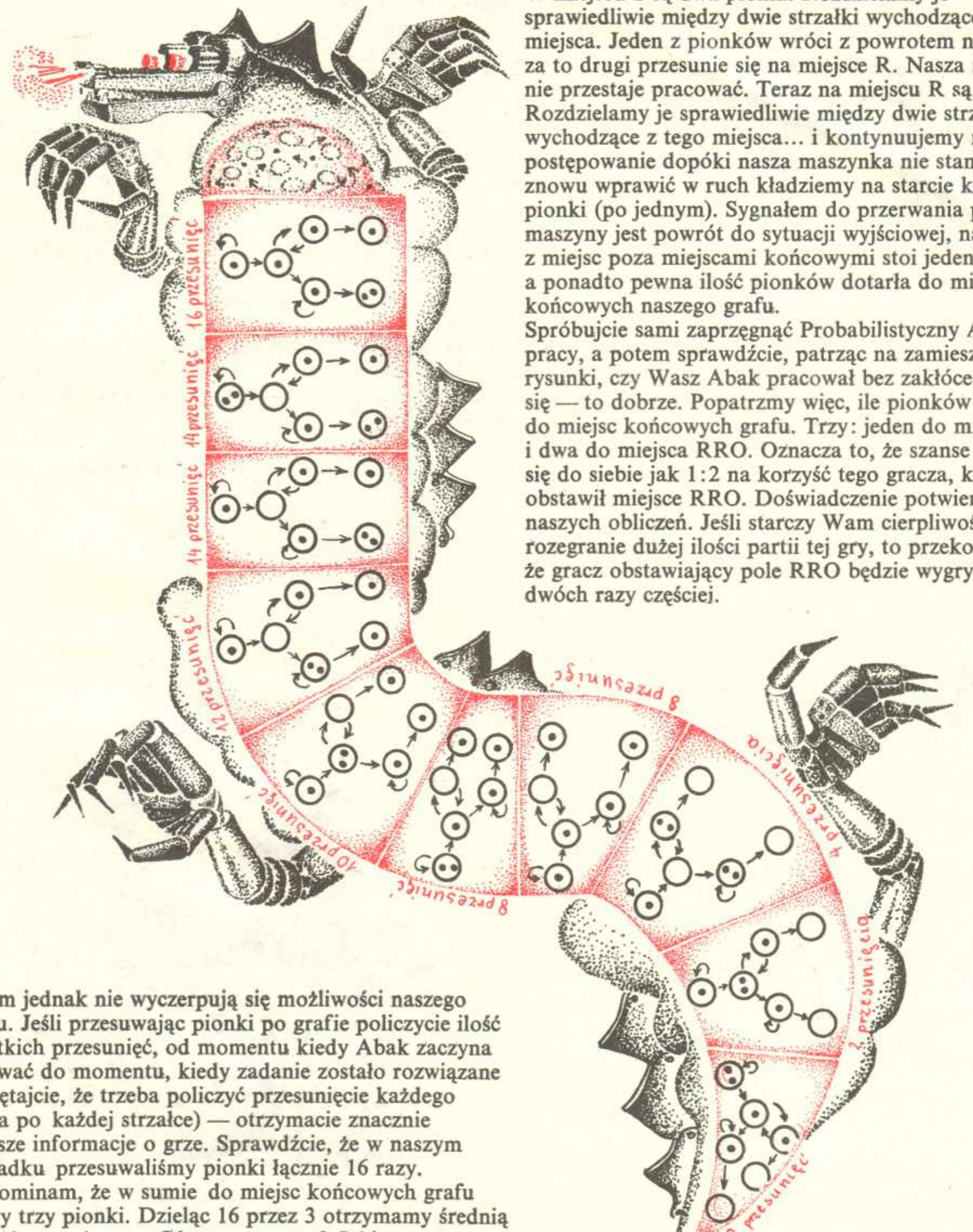
Przyglądając się budowie naszego grafu można się wprawdzie zorientować, że większe szanse wygranej ma gracz drugi, ale dokładne porównanie szans obydwu graczy jest sprawą trochę trudniejszą. Nie ma jednak rzeczy trudnych dla Probabilistycznego Abaku.



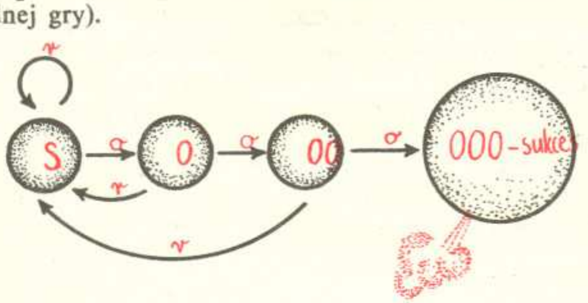
Abak — to starożytne liczydła.

Coż to takiego jest ten Probabilistyczny Abak? Odpowiednio powiększony (przerysowany na papierze z bloku rysunkowego) nasz graf, spora ilość pionków (mogą to być zwykłe guziki) i kilka prostych reguł przesuwania pionków po grafie. Zaczynamy od umieszczenia pionków po jednym na każdym miejscu grafu poza miejscami końcowymi i startem. Następnie dokładamy pionek na starcie. Dokładamy jeszcze jeden pionek... i nasza maszynka do rozwiązywania zadań zaczyna pracować.

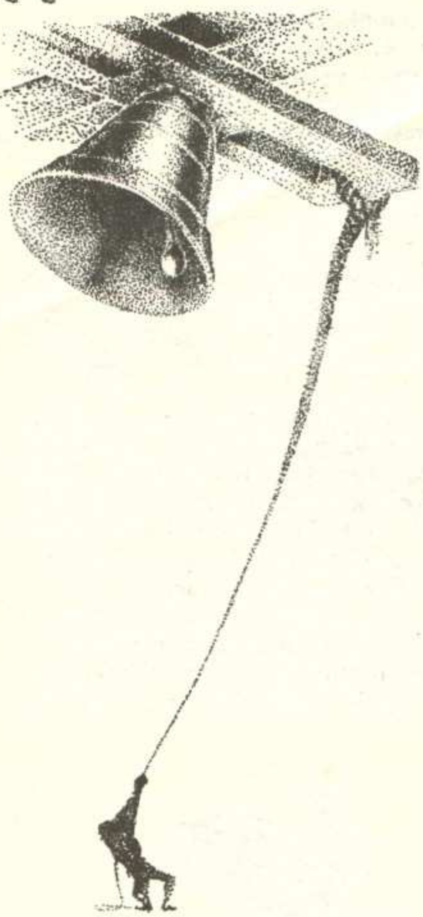
W miejscu S są dwa pionki. Rozdzielamy je sprawiedliwie między dwie strzałki wychodzące z tego miejsca. Jeden z pionków wróci z powrotem na miejsce S, za to drugi przesunie się na miejsce R. Nasza maszynka nie przestaje pracować. Teraz na miejscu R są dwa pionki. Rozdzielamy je sprawiedliwie między dwie strzałki wychodzące z tego miejsca... i kontynuujemy nasze postępowanie dopóki nasza maszynka nie stanie. Chcąc ją znowu wprawić w ruch kładziemy na starcie kolejne pionki (po jednym). Sygnałem do przerwania pracy maszyny jest powrót do sytuacji wyjściowej, na każdym z miejsc poza miejscami końcowymi stoi jeden pionek a ponadto pewna ilość pionków dotarła do miejsc końcowych naszego grafu.
Spróbujcie sami zaprzęgnąć Probabilistyczny Abak do pracy, a potem sprawdźcie, patrząc na zamieszczone obok rysunki, czy Wasz Abak pracował bez zakłóceń. Zgodziło się — to dobrze. Popatrzmy więc, ile pionków dotarło do miejsc końcowych grafu. Trzy: jeden do miejsca ROO i dwa do miejsca RRO. Oznacza to, że szanse graczy mają się do siebie jak 1:2 na korzyść tego gracza, który obstawił miejsce RRO. Doświadczenie potwierdza wyniki naszych obliczeń. Jeśli starczy Wam cierpliwości na rozegranie dużej ilości partii tej gry, to przekonacie się, że gracz obstawiający pole RRO będzie wygrywał około dwóch razy częściej.



Na tym jednak nie wyczerpują się możliwości naszego Abaku. Jeśli przesuwając pionki po grafie policzycie ilość wszystkich przesunięć, od momentu kiedy Abak zaczyna pracować do momentu, kiedy zadanie zostało rozwiązane (pamiętajcie, że trzeba policzyć przesunięcie każdego pionka po każdej strzałce) — otrzymacie znacznie bogatsze informacje o grze. Sprawdźcie, że w naszym przypadku przesuwaliśmy pionki łącznie 16 razy. Przypominam, że w sumie do miejsc końcowych grafu dotarły trzy pionki. Dzieląc 16 przez 3 otrzymamy średnią długość trwania gry. Cóż to oznacza? Jakie ma to znaczenie praktyczne? Jeśli będziecie grać wielokrotnie, to łączna ilość rzutów monetą we wszystkich grach powinna być bliska następującej liczbie: ilość rozegranych gier pomnożona przez 16/3 (średnią długość trwania jednej gry).



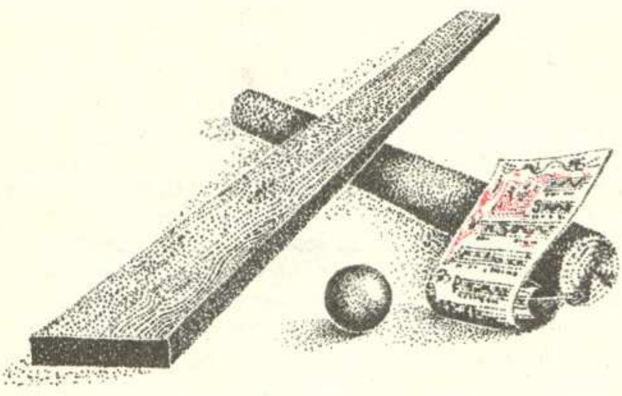
Te możliwości naszego Probabilistycznego Abaku proponuję wykorzystać do rozwiązania następującego problemu. Rzucamy monetą dopóty, dopóki nie wyrzucimy trzech orłów pod rząd. Ilu rzutów (średnio biorąc) powinniśmy się spodziewać na osiągnięcie tego rezultatu? Tym, którzy nie czytali poprzedniego numeru Małej Delty, ułatwiłem zadanie rysując graf odpowiadający naszej grze. A reszta należy do Abaku. Abak jest niezawodny. Kto nie wierzy, niech uzyskane rozwiązanie sprawdzi doświadczalnie.



Galileusz i piosenka

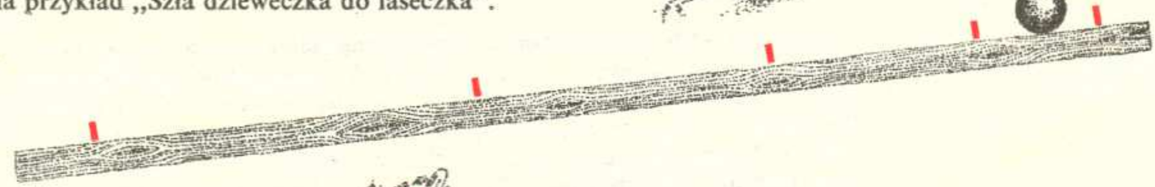
W poprzednim numerze była mowa o dokładności zegarów konstruowanych w dawnych czasach i obecnie. Zastanawiające jest, jak uczeni w dawnych wiekach mogli sobie radzić z pomiarami krótkich odcinków czasu. Szereg podstawowych praw mechaniki odkryto w epoce, kiedy nie umiano mierzyć odcinków czasu krótszych niż jedna sekunda. Na przykład, prawo spadku swobodnego odkrył Galileusz na początku XVII wieku. Prawo to mówi, że droga przebyta przez ciało spadające z wieży lub zsuwające się po równi pochyłej jest proporcjonalna do kwadratu czasu, jaki upłynął od początku ruchu. Stwierdzenie tego faktu wymagało od uczonego podziału czasu spadania na równe odcinki z dość dużą dokładnością. Einstein, który był zawsze pełen podziwu dla Galileusza, uważał, że odkrycie tego prawa było czystą spekulacją, ponieważ Galileusz nie był w stanie wykonać odpowiednich pomiarów. Jednakże, jak sugeruje ostatnio amerykański historyk nauki, Stillman Drake, Einstein nie docenił roli doświadczenia w pracy Galileusza. Drake wysunął ciekawą hipotezę, że tajemnicą sukcesu Galileusza była... piosenka.

Kiedy mówimy o pomiarze czasu, myślimy o wyrażeniu czasu w standardowych jednostkach, np. w sekundach. Tymczasem nie jest to wcale konieczne. Dyrygent orkiestry dzieli czas z wielką dokładnością nie myśląc o żadnych jednostkach czasu. Zresztą, każdy z nas potrafi odmierzyć równo bardzo małe odstępy czasu. Robimy to, na przykład, tańcząc lub śpiewając. Krok w tańcu może trwać pół sekundy, jednak opóźnienie w stosunku do muzyki o drobny ułamek sekundy może być w oczach partnerki niewybaczalne.
Muzyka, jako pomoc naukowa, musiała być bliska Galileuszowi, którego ojciec i brat byli zawodowymi muzykantami. Sam uczony dobrze grał na lutni, a nawet próbował komponować.



Proponuję ci wykonać doświadczenie podobne do tego, które prawdopodobnie w 1604 roku doprowadziło Galileusza do poznania prawa spadku swobodnego. Weźmy długą, gładką deskę i połóżmy ją na podłodze lekko podnosząc z jednej strony tak, by była nachylona do podłogi pod kątem około jednego stopnia. Na górnym końcu deski połóżmy mały przedmiot, który może się po niej łatwo toczyć. Może to być kulka, dziecinny samochodzik, szpulka od nici itp. Pozwólmy mu stoczyć się swobodnie wzdłuż deski i obserwujmy jego ruch.

Zamiast szukać deski można lekko pochylić stół kuchenny, ale wtedy trzeba zapewnić przedmiotowi miękkie lądowanie na przykład zatrudniając „asystenta" do łapania go w powietrzu. W miarę oddalania się od początku równi pochyłej kulka toczy się coraz szybciej. W jaki sposób wzrasta jej prędkość? Jak rośnie w czasie jej odległość od szczytu równi? Żeby odpowiedzieć na te pytania, trzeba zaznaczyć, gdzie znajdowała się kulka po upływie jednego, dwóch, trzech itd. równych odcinków czasu. Musimy to oczywiście zrobić bez pomocy zegarka. Jak? Ano właśnie, przypomnijmy sobie jakąś łatwą rytmiczną melodię, na przykład „Szła dzieweczka do laseczka".



Puśćmy teraz kulkę zaczynając jednocześnie nucić. Na początku każdego taktu zaznaczamy kredą lub innym pisakiem miejsce, gdzie znajdowała się kulka (w przypadku większego przedmiotu — jego określony punkt, na przykład przód samochodzika). Odstępy między kolejnymi kreskami okazują się coraz większe. Warto powtórzyć eksperyment kilka razy. Otrzymamy pewien rozrzut, czyli grupki kresek odpowiadających poszczególnym taktom. W każdej grupie kresek zaznaczymy wyraźniej jej środek. Teraz możemy zmierzyć odległości poszczególnych kresek (tych otrzymanych z uśrednienia) od miejsca, z którego puściliśmy kulkę. Ktoś, kto wykonał to doświadczenie, otrzymał następujący wynik:

numer kreski	długość (cm)	
1	6	
2	25	6×4
3	55	6×9
4	95	6×16

Okazuje się, że poszczególne odległości można w przybliżeniu zapisać jako iloczyny pewnej liczby (w naszym wypadku 6 cm) i kwadratów kolejnych liczb całkowitych. Przy innym nachyleniu deski otrzymalibyśmy inne liczby, ale zawsze spełniałyby one powyższy związek.

To, że Galileusz w ten właśnie sposób odmierzał czas przy wykonywaniu swego doświadczenia, jest tylko domysłem. Uczony nie wspomina o tym w swoich pracach. Pewnie obawiał się, że zdanie: „Sprawdziłem to prawo śpiewając piosenkę, podczas gdy kulka staczała się po równi" brzmiałoby humorystycznie w publikacji naukowej.

Małą »Deltę« opracowali Przemysław Nowicki i Daria Ziemińska