Dwie indukcje

Zbigniew OGIELSKI

Kol. Z. Ogielski w chwili nadesłania artykułu był uczniem II kl. LO im. M. Konopnickiej w Inowrocławiu.

Na zawodach okręgowych Olimpiady Matematycznej w r. 1974 było następujące zadanie:
„Niech Z będzie zbiorem n-elementowym. Znaleźć liczbę takich par zbiorów (A, B), że $A \subset B$ i $B \subset Z$."
Rozwiązanie tego zadania sprowadzało się do dowodu, że liczba takich par wynosi 3^n.
Nawiązując do powyższego tematu dokonałem uogólnienia jego rozwiązania, udowadniając następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Niech Z będzie zbiorem n-elementowym. Wtedy liczba k-elementowych ciągów zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ takich, że $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_k \subset Z$ wynosi $(k+1)^n$.

Wiadomo, że wszystkich funkcji określonych na zbiorze n-elementowym o wartościach w zbiorze k-elementowym jest k^n. Omawiane tu twierdzenie jest niemal natychmiastową konsekwencją tego faktu, jeśli rozważy się funkcję przyporządkowującą każdemu elementowi zbioru Z liczbę zbiorów A_k, do których element ten należy.

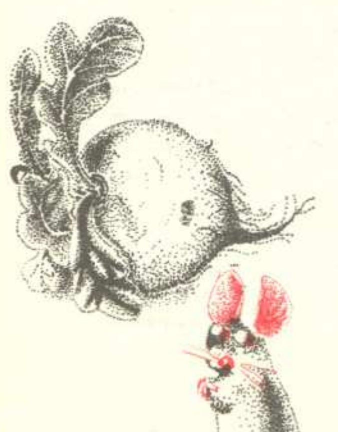
Dowód

Sposób I

Twierdzenia dowodzimy przez indukcję względem k przy ustalonym n. Prawdziwość twierdzenia dla $k = 1$ zapewnia twierdzenie, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi $2^n = (1+1)^n$. Sprawdzenie twierdzenia dla $k = 2$ było tematem podanego na wstępie zadania. Twierdzenie jest więc prawdziwe dla $k = 1$ i $k = 2$. Załóżmy zatem, że twierdzenie zachodzi dla pewnego k przy dowolnym n.
Chcemy dowieść, że zachodzi ono wtedy dla $k+1$, czyli chcemy dowieść, że gdy Z jest zbiorem n-elementowym, to liczba ciągów zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ takich, że $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_{k+1} \subset Z$ wynosi $(k+2)^n$.
Istotnie bowiem, gdy zbiór A_{k+1} jest i-elementowy, to liczba takich zbiorów A_{k+1} wynosi $\binom{n}{i}$.
Dla pewnego zbioru A_{k+1} i-elementowego liczba ciągów zbiorów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ takich, że $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_k \subset A_{k+1}$ wynosi z założenia $(k+1)^i$.
Zatem liczba wszystkich ciągów zbiorów $A_1, A_2, \ldots \ldots, A_k, A_{k+1}$ takich, że $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_k \subset A_{k+1}$ i zbiór A_{k+1} jest i-elementowy wynosi $\binom{n}{i} \cdot (k+1)^i$.
Ponieważ zbiór A_{k+1} może być 0, 1, 2, ..., n-elementowy, więc liczba wszystkich ciągów $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k, A_{k+1}$ takich, że $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset Z$ wynosi:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (k+1)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (k+1)^i \cdot 1^{n-i} = ((k+1)+1)^n = (k+2)^n.$$

Sprawdziliśmy prawdziwość twierdzenia dla $k = 1$ i $k = 2$. Następnie wykazaliśmy, że z prawdziwości twierdzenia dla k wynika jego prawdziwość dla $k+1$. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.



Sposób II

Twierdzenie to udowodnimy przez indukcję względem n przy ustalonym k.
Niech $Z = \emptyset$ czyli Z jest zbiorem 0-elementowym. Wtedy jedynym ciągiem spełniającym warunki zadania jest ciąg $A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots, A_k$, gdzie $A_i = \emptyset$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, czyli liczba ciągów wynosi $1 = (k+1)^0$.
Załóżmy teraz,
że twierdzenie zachodzi dla pewnego n. Chcemy dowieść, że zachodzi ono wtedy dla $n+1$.
Niech $Z = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$.
Podzielmy zbiór ciągów zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ takich, że $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset$ $\subset Z$ na $k+1$ klas rozłącznych.

Do i-tej klasy dla $i = 1, 2, \ldots, k$ zaliczymy te ciągi, które zawierają element a_{n+1} w zbiorze A_i, a nie zawierają go w zbiorze A_{i-1}. Z określenia ciągu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ wynika, że jeżeli

$$a_{n+1} \in A_i, \text{ to } a_{n+1} \in A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_k \text{ ponieważ}$$
$$A_i \subset A_{i+1} \subset A_{i+2} \subset \ldots \subset A_k \text{ oraz jeżeli } a_{n+1} \notin A_{i-1}, \text{ to}$$
$$a_{n+1} \notin A_{i-2}, A_{i-3}, \ldots, A_i, \text{ ponieważ}$$
$$A_{i-1} \supset A_{i-2} \supset A_{i-3} \ldots \supset A_1.$$

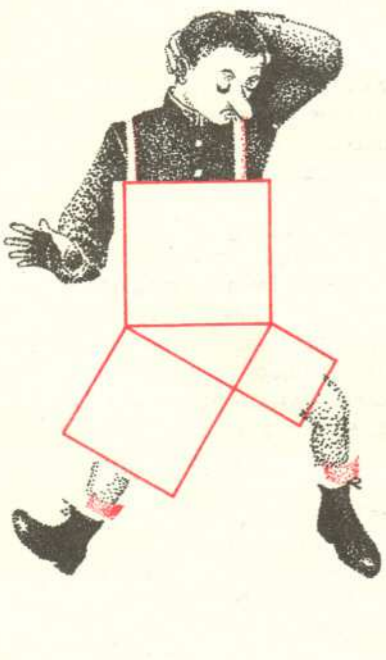
Do $(k+1)$-szej klasy zaliczymy te ciągi $A_1, A_2, \ldots, A_k$, które nie zawierają elementu a_{n+1} w żadnym ze zbiorów A_i dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Klasy te są rozłączne i dają w sumie zbiór wszystkich ciągów $A_1, A_2, \ldots, A_k$.
W klasie $(k+1)$-szej jest tyle ciągów, ile jest ciągów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ dla zbioru $Z = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, czyli z założenia $(k+1)^n$.
W klasie i-tej dla $i = 1, 2, \ldots, k$ jest też tyle ciągów, ile można otrzymać ze zbioru $Z = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ czyli z założenia $(k+1)^n$, ponieważ każdy ciąg i-tej klasy dla $i = 1, 2, \ldots$, k możemy otrzymać z pewnego ciągu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ utworzonego dla zbioru $Z = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ po dodaniu do każdego zbioru $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_k$ elementu a_{n+1}. Zatem wszystkich ciągów jest

$$(k+1) \cdot (k+1)^n = (k+1)^{n+1}.$$

Twierdzenie jest więc prawdziwe dla $n+1$. Na podstawie zasady indukcji matematycznej wnioskujemy, że jest ono prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

Tyle od Autora. Nasuwa się kilka refleksji. Sformułowane twierdzenie dotyczyło par (k, n) liczb naturalnych. Pokazano nam, że można dowodzić go zarówno przez indukcję tylko względem k, jak i tylko względem n. Dlaczego tak jest? Mogło by się zdawać, że skoro najpierw jest indukcja względem k, to potem jeszcze powinno się coś zrobić z n — np. też zastosować indukcję. Czy może w związku z tym poprawność przedstawionych dowodów daje się podważyć? Dlaczego nie? Jeśli dowody są poprawne, to czy zawsze tak być musi, że w twierdzeniach o parach liczb naturalnych można stosować indukcję ze względu na każdą ze zmiennych?
Kiedy? Czekamy na uwagi i refleksje. (Red.)

Znane twierdzenie Pitagorasa



Wśród licznych twierdzeń matematyki są nieliczne takie, o których każdy słyszał. Na przykład twierdzenie Pitagorasa. W szóstym wieku przed naszą erą w państwie — zakonie założonym przez Greka Pitagorasa w południowej Italii zostało uzyskane trochę empirycznie, trochę mistycznie twierdzenie, które, tak jak wszystkie inne, podpisano imieniem Mistrza. Brzmiało ono... Otóż wcale nie tak jak myślicie. Brzmiało ono: wysokość dzieli trójkąt prostokątny na dwa do niego podobne (czyli o proporcjonalnych bokach, jak to dziś można powiedzieć).
Mijały lata. Przeminęła tyrania Pizystrata, zaczęły się i skończyły wojny perskie, wielkie Ateny Peryklesa ustąpiły miejsca Sparcie i gdy Grecja szykowała się do ostatecznej rozprawy z Macedonią, w połowie IV w. p.n.e. inny Grek — Eudoksos wynalazł proporcję i przetłumaczył twierdzenie Pitagorasa na znaną nam formułkę $a^2+b^2 = c^2$, której jednak nie zapisał, bo nie umiał w ogóle nic formalnie zapisać. Formułka tego typu została podana dopiero w wieku XV, gdy scholastyczne uniwersytety Włoch i Francji stworzyły zapis algebraiczny.
Kolejne wcielenie twierdzenia Pitagorasa, znów geometryczne, otrzymaliśmy od Racjonalizmu, epoki Kartezjusza, Newtona, Leibniza, Bernoullich. Orzeka ono, że jeśli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy (jakiekolwiek) figury podobne, to suma pól dwóch mniejszych będzie równa polu trzeciej z nich. Tak też uczono tego twierdzenia przez dwa stulecia. Nasza Komisja Edukacji Narodowej w tej też postaci zaleciła go nauczać.
Czasy *Niebieskiego mundurka* i *Syzyfowych prac* zerwały z dowolnością, na jaką zezwalało powyższe sformułowanie i zastąpiły „jakąkolwiek" figurę kwadratem — miało to być niezmiernie dydaktyczne, przecież o kwadracie się „mówi" odczytując formułkę

$$a^2+b^2 = c^2.$$

Prawda?