Gdyby zaś istniały dwie różne drogi po nienaruszonych groblach łączące P i Q, to musiałaby istnieć droga zamknięta utworzona z tych grobli, a więc ograniczony przez nią zespół poletek nie byłby zalany. Widzimy więc, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między nie przerwanymi groblami a wierzchołkami różnymi od P, zatem $B = w-1$.
Stąd

$$k = A+B = s-1+w-1 = s+w-2,$$

czyli
udowodniliśmy wzór Eulera,

$$s-k+w = 2.$$

Rzućmy jeszcze raz okiem na przeprowadzony dowód. Cała jego istota zawarta jest w rozumowaniu „hydrologicznym", dotyczącym nawadniania poletek przez przerywanie możliwie najmniejszej liczby grobli. Stąd łatwo zauważyć, że taki sam wzór jest prawdziwy dla dowolnej „mapy na globusie" — rozumianej jako układ krajów, granic i wierzchołków — przy czym granica jest częścią wspólną dwóch różnych krajów, zaś wierzchołek jest punktem przecięcia się różnych granic. Tak rozumiana „mapa" jest tworem ogólniejszym niż „mapa" otrzymana przez deformację powierzchni wielościanu (którą można by nazwać zdeformowaną siatką wielościanu). Dla takich ogólniejszych map wzór Eulera pozostaje słuszny, jeśli tylko żaden kraj nie rozdziela mapy na dwie rozłączne części — tzn. żaden kraj nie otacza więcej niż jednej wyspy.
Jeśli któryś z Czytelników uznał, że przedstawiony wyżej dowód wzoru Eulera jest zbyt mało matematyczny, to powinien zastanowić się nad większym sformalizowaniem całego postępowania. Zauważy wtedy niewątpliwie, że nie jest to wcale takie łatwe. A więc czasem proste intuicje nie dają się szybko ująć w formalne rozumowanie. Przytoczmy jeszcze dwa zadania związane z wzorem Eulera.
1. Udowodnić, że w każdym wielościanie wypukłym suma liczby ścian trójkątnych i liczby kątów trójściennych jest $\geqslant 8$.
2. Udowodnić, że liczbami ścian wielościanu foremnego mogą być tylko liczby 4, 6, 8, 12, 20.

2. Czytelnikowi zainteresowanemu dalszymi informacjami o wzorze Eulera i związaną z nim problematyką polecamy książki:
I. Dynkin, W. Uspienski: *Ciekawe zagadnienia matematyczne*. PZWS, W-wa 1956.
H. Rademacher, O. Toeplitz: *O liczbach i figurach*. PWN, W-wa 1956 r.
R. Courant, H. Robbins: *Co to jest matematyka*. PWN, W-wa 1959 r.

Zadania

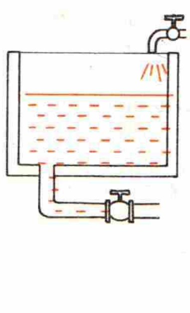
Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 73. Jaka jest maksymalna liczba wyrazów, które może mieć po wykonaniu redukcji wyrazów podobnych wielomian n-tego stopnia m zmiennych?
(Stopniem wielomianu wielu zmiennych nazywamy największy ze stopni występujących w nim jednomianów, stopniem zaś jednomianu $x_1^{a_1}x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}$nazywamy liczbę $a_1+a_2+ \dots +a_k$).
Rozwiązanie na stronie 15.

M 74. Dany jest trójkąt ABC, którego środkowe $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ przecinają się w punkcie G. Udowodnić, że jeżeli promienie kół wpisanych w trójkąty AGE i BGD są równe, to $AC = BC$.
Rozwiązanie na stronie 16.

M 75. Proste równoległe do boków trójkąta i przechodzące przez jego punkt wewnętrzny O podzieliły ten trójkąt na trzy trójkąty i trzy równoległoboki. Iloczyn pól trójkątów wynosi T. Obliczyć iloczyn pól równoległoboków.
Rozwiązanie na stronie 5.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI



F 25. Pamiętacie na pewno ze szkoły podstawowej klasyczne zadanie o basenie:
„Do basenu prowadzą dwie rury. Pierwsza może napełnić basen w ciągu 5 godzin, druga może go opróżnić w ciągu 10 godzin. W jakim czasie można napełnić basen, jeżeli otworzy się obie rury równocześnie?" (patrzcie, rysunek obok).
Na stronie 7 zamieszczamy rozwiązanie od wieków pokutujące w podręcznikach szkolnych. Przyjrzyjcie się temu rozwiązaniu jako fizycy.