

Rys. 3 — Rozkłady widmowe czułości widzenia (według Feynmana): a — dziennego (czopki), b — zmierzchowego (pręciki)

Proponuję Wam zbadanie własności pręcików w następujący sposób: Wytnijcie z okładki prostokąty o różnych kolorach i postarajcie się ułożyć je według jasności. Zapiszcie kolejność. Następnie połóżcie je na stole i zaciemnijcie pomieszczenie. Musi być tak ciemno, żebyście w pierwszej chwili **zupełnie nic nie widzieli**. Po pewnym czasie (15–30 min) zaczniecie rozróżniać kontury przedmiotów w pokoju. To pręciki zaczynają działać (jeżeli przedobrzyliście z zaciemnieniem i nic nie widać, musicie trochę je „zepsuć”). Teraz ułóżcie kolorowe prostokąciki według jasności i zapalcie światło. Na pewno będziecie zdziwieni: kolejność będzie się znacznie różnić. Wynika to stąd, że maksimum czułości widmowej pręcików jest przesunięte w stronę fal krótkich (kolor niebieski) w porównaniu z wypadkową czułością czopków (rys. 3). Czy potraficie powiedzieć dlaczego?

Metody Monte Carlo (IV)

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

OBLICZANIE CAŁEK

Po zorientowaniu się, o co w ogóle chodzi w metodach Monte Carlo (odcinek I) i po zapoznaniu się z podstawami teoretycznymi tych metod (odcinek II), możemy przystąpić do ich bardziej dokładnego studiowania.

Olbrzymia większość metod Monte Carlo jest związana z obliczaniem całek. Różne zadania z fizyki, techniki, ekonomii itd. oraz różne zadania numeryczne (takie np. jak rozwiązywanie układów liniowych równań algebraicznych lub równań różniczkowych) można „zredagować” jako zadania obliczania odpowiednich całek. Zadania rozważane przez nas w odcinku I były również zadaniami tego typu. Zajmiemy się więc teraz bardziej systematycznie takimi zadaniami.

Rozpoczniemy od bardzo prostego zadania obliczenia całki

$$(1) \quad I = \int_a^b f(x) dx,$$

zakładając o funkcji f , że jest nieujemna i ograniczona z góry, np. przez liczbę c . Uważny Czytelnik zorientuje się w toku dalszego wykładu, że nieujemność funkcji potrzebna jest tylko dla łatwiejszego wysłowienia niektórych dalszych sformułowań. Poważniejszą rolę odgrywa założenie o ograniczności funkcji, ale obliczanie całek funkcji nieograniczonych wymaga specjalnych metod i nie będziemy się tym zajmowali.

Najprostszą (choć najmniej dokładną) metodą obliczania całki I związana jest z szacowaniem prawdopodobieństwa sukcesu w odpowiednio skonstruowanym ciągu prób Bernoulli'ego. Będziemy używali nazwy metoda „orzel — reszka”. A oto jej schemat.

W prostokątnym układzie współrzędnych wykreślmy funkcję f . Na rysunku obok zakreskowano tę część prostokąta $ABCD$, która leży pod wykresem funkcji f . Całkę I możemy interpretować jako pole powierzchni zakreskowanej figury. Figurę tę oznaczamy przez F .

Jeżeli na prostokąt $ABCD$ będziemy rzucali na chybił-trafił punkty i za sukces będziemy uważali zdarzenie polegające na tym, że punkt upadnie na figurę F , to prawdopodobieństwo sukcesu — oznaczmy je przez p — będzie równe stosunkowi pól figury F i prostokąta $ABCD$ (patrz artykuł o prawdopodobieństwach geometrycznych w Delcie 6/1975). Wtedy oczywiście całka I wyraża się wzorem

$$(2) \quad I = p \cdot \text{Pole}(ABCD),$$

Pole $(ABCD)$ jest oczywiście równe $(b-a) \cdot c$, więc dla oszacowania całki wystarczy oszacować prawdopodobieństwo p . Jest to bardzo łatwe zadanie rozważane przez nas już w poprzednich odcinkach: przypuśćmy, że na prostokąt $ABCD$ rzuciliśmy n punktów i że k spośród nich upadło na figurę F . Oszacowaniem prawdopodobieństwa p jest wtedy

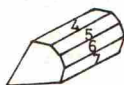
$$(3) \quad \hat{p} = \frac{k}{n},$$

a błąd tego oszacowania (patrz poprzednie odcinki) przyjmujemy $2 \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$.

Oszacowaniem całki I jest oczywiście $\hat{I} = \hat{p} \cdot \text{Pole}(ABCD)$, a błąd tego oszacowania wynosi $2 \cdot \text{Pole}(ABCD) \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$.

Dla praktycznego stosowania opisanej wyżej metody pozostaje nam nauczyć się jeszcze rzucania na chybił-trafił punktów na prostokąt $ABCD$. Najprościej sprawa przedstawia się wtedy, gdy $a = 0$ oraz $b = c = 1$. Wtedy oczywiście Pole $(ABCD) = 1$ i całka I jest równa po prostu prawdopodobieństwu sukcesu p . Przypuśćmy, że tak jest. Do rzucania punktów na kwadrat jednostkowy najlepiej jest użyć specjalnej „kostki” w kształcie bądź dwudziestościanu foremnego, który ma dwie ściany oznaczone cyfrą 0, dwie oznaczone cyfrą 1 itd., bądź w kształcie bączka wyciętego z prostopadłościanu o podstawie regularnego dziesięciokąta, którego boczne ściany oznaczone są kolejnymi cyframi 0, 1, 2, ..., 9.

Jeżeli np. decydujemy się na wykonywanie rachunków z dokładnością do czterech cyfr po przecinku, rzucamy osiem razy naszą kostką i zaobserwowane wyniki układamy w odpowiednie liczby. Np. po wyrzuceniu cyfr: 4, 6, 3, 0, 0, 5, 9, 2 układamy dwie liczby: $x = 0,4630$ oraz $y = 0,0592$.





Rozwiązanie zadania M 73.

Wielomian n -tego stopnia m zmiennych jest sumą jednomianów postaci

(*) $ax_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m}$, gdzie $a_1 \geq 0$
 $a_1 + a_2 + \dots + a_m \leq n$.

Wobec równości

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m} =$$

$$= x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_m^{a_m} \cdot 1^{n-(a_1+\dots+a_m)}$$

widzimy, że różnych jednomianów postaci (*)

jest tyle, ile jest ciągów $a_1, a_2, \dots, a_m, n -$

$-(a_1 + \dots + a_m)$, gdzie $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots,$

$a_m \geq 0, n - (a_1 + \dots + a_m) \geq 0$, a więc tyle,

ile jest rozwiązań równania

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} = n$$

w liczbach całkowitych nieujemnych.

Na podstawie wyniku zadania M63

rozwiązań tych jest

$$\binom{m+1+n-1}{m} = \binom{m+n}{m}.$$

Liczby te traktujemy jako współrzędne punktu rzucającego losowo na kwadrat jednostkowy. Sukces ma miejsce oczywiście wtedy, gdy współrzędne (x, y) otrzymanego punktu spełniają warunek

$$(4) \quad y < f(x).$$

Można oczywiście wykonywać rzuty zwykłą sześcienną kostką do gry, ale wtedy szóstkę na tej kostce należałoby zastąpić zerem, a zapisaną liczbę traktować jako liczbę w szóstkowym układzie liczenia. Można również użyć zwykłej monety, pisząc np. zero, gdy w wyniku rzutu pojawi się orzeł, i jeden, gdy pojawi się reszka; teraz otrzymaną liczbę trzeba by traktować jako liczbę zapisaną w systemie dwójkowym. Są jeszcze inne metody losowania, specjalnie przystosowane do elektronicznych maszyn cyfrowych; pomówimy o nich w oddzielnym odcinku.

W ogólnym przypadku, gdy warunek $a = 0, b = c = 1$ nie jest spełniony, postępujemy w następujący sposób. Najpierw losujemy punkt z przedziału $(0,1)$ — tak jak to wyżej opisano. Dla otrzymania współrzędnej y „rozciągamy” ten przedział do przedziału $(0,c)$ mnożąc wylosowaną liczbę przez c . Dla otrzymania współrzędnej x rozciągamy przedział tak, aby miał długość równą $b-a$, a następnie przesuwamy go wzdłuż osi Ox tak, żeby jego początek miał odcięty równą a . Punkt (x', y') o współrzędnych

$$(5) \quad \begin{aligned} x' &= a + (b-a) \cdot x, \\ y' &= cy, \end{aligned}$$

gdzie (x, y) jest punktem losowym w kwadracie jednostkowym, jest punktem losowym w prostokącie $ABCD$.

Reasumując, możemy sformułować następujący algorytm obliczania całki metodą „orzeł—reszka”:

1. wylosować dwie liczby x i y z przedziału $(0, 1)$;
2. obliczyć punkt (x', y') według wzorów (5);
3. sprawdzić, czy zachodzi nierówność

$$y' < f(x'),$$

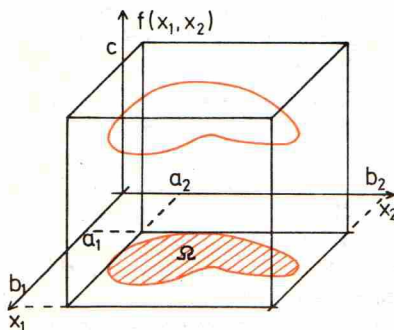
jeżeli tak — odnotować sukces, jeżeli nie — odnotować porażkę;

4. powtórzyć wszystkie powyższe czynności n razy. Jeżeli liczba sukcesów równa jest k , to oszacowaniem całki (1) jest

$$\hat{I} = \frac{k}{n} \cdot \text{Pole}(ABCD),$$

a błąd tego oszacowania wynosi

$$2 \cdot \text{Pole}(ABCD) \cdot \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}.$$



Metoda „orzeł—reszka” w opisanej wyżej postaci jest w praktyce bardzo rzadko stosowana. Przyczyną tego jest nie tyle niedoskonałość samej metody, ile fakt istnienia innych, znacznie lepszych metod (również metod Monte Carlo) obliczania całek. Omawiana metoda bywa jednak nieraz stosowana w przypadku, gdy funkcja f jest funkcją wielu zmiennych i gdy obszar całkowania jest bardziej skomplikowany (w rozpatrywanym przed chwilą przypadku był to po prostu przedział). Wtedy zadanie polega oczywiście na oszacowaniu pewnej „objętości”. Sytuacje, jakie powstają, gdy całkuje się funkcję $f(x_1, x_2)$ dwóch zmiennych po pewnym obszarze Ω ilustruje rysunek obok.

Teraz losuje się punkt w prostopadłości zawierającym figurę, której podstawą jest obszar całkowania Ω i „sufitem” wykres funkcji $f(x_1, x_2)$. Algorytm obliczeń modyfikuje się w następujący sposób:

1. wylosować trzy liczby x_1, x_2, y w przedziale $(0, 1)$;
2. obliczyć punkt (x'_1, x'_2, y') według wzorów

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_1 + (b_1 - a_1) \cdot x_1, \\ x'_2 &= a_2 + (b_2 - a_2) \cdot x_2, \\ y' &= cy; \end{aligned}$$

3. sprawdzić, czy spełnione są warunki:

$$\begin{aligned} (x'_1, x'_2) &\in \Omega, \\ y' &< f(x'_1, x'_2), \end{aligned}$$

jeżeli tak — odnotować sukces; jeżeli chociaż jeden z tych warunków nie jest spełniony — odnotować porażkę.

Punkt czwarty algorytmu pozostaje bez zmiany, z tym że w odpowiednim wzorze pole prostokąta $ABCD$ należy zastąpić objętością prostopadłości zawierającego interesującą nas figurę; jest ona oczywiście równa $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot c$.

Czytelnik z pewnością bez trudu zauważy, że uogólnienie omawianej metody na przypadek całkowania funkcji większej liczby zmiennych po najbardziej wyszukanych obszarach nie nastrocza żadnych trudności.

