Jeszcze raz o wzorze Eulera, czyli zastosowanie stawów i grobli w stereometrii

Dr Jan A. REMPAŁA

1. W tym przypadku spójność „kraju" polega na tym, że każde dwa jego punkty można połączyć łamaną zawartą całkowicie w tym zbiorze.

W 1752 roku znakomity matematyk szwajcarski Leonard Euler, podówczas profesor Akademii Nauk w Berlinie, odkrył zadziwiający związek między liczbami s, k, w ścian, krawędzi i wierzchołków dowolnego wielościanu wypukłego W. Związek ten jest obecnie nazywany *wzorem Eulera* dla wielościanów i zwykle zapisuje się go w postaci

$$s-k+w = 2.$$

Podamy elementarny i chyba nader zabawny dowód tego wzoru.
Zauważmy przede wszystkim, że jeśli nasz wielościan W poddamy dowolnemu przekształceniu f nie „rozrywającemu" i nie „sklejającemu" (homeomorfizmowi), to otrzymany zbiór $W' = f(W)$ może już nie być wielościanem, ale możemy mówić o jego „ścianach", „krawędziach" i „wierzchołkach" przyjmując, że są to obrazy odpowiednio ścian, krawędzi i wierzchołków W. Oczywiście przy takiej umowie liczby „ścian", „krawędzi" i „wierzchołków" dla W' są takie same jak dla W.
Wyobraźmy sobie, że powierzchnia S wielościanu W jest cienką, elastyczną powłoką np. gumową, wewnątrz pustą — a przekształcenie f jest deformacją W na kulę W' otrzymaną przez nadmuchanie powłoki S. Kula W' nie jest co prawda wielościanem, ale może być poglądowo interpretowana jako globus i wtedy jej powierzchnia S' jest mapą na globusie.
Kraje na mapie S' to obszary powierzchni kuli będące obrazami ścian W, granice krajów są obrazami krawędzi, zaś punkty rozgałęzienia granic (wierzchołki mapy) są obrazami wierzchołków W. Mapa ta zawiera więc wszelkie informacje potrzebne do dowodu wzoru Eulera. Możemy także, jak to zwykle zresztą się czyni z mapami, przedstawić S' na płaszczyźnie.
Wyobraźmy sobie, że wykonano to w ten sposób, że rozcięto sferę wzdłuż pewnej krzywej zawartej wewnątrz jednego ustalonego kraju. Obrazem S' jest więc płaska mapa S'', na której jeden kraj otacza wszystkie inne.
Możliwości wyobraźni są nieograniczone, więc korzystajmy z nich nadal.
Wyobraźmy sobie teraz, że naszą mapę S'' odtworzono w terenie w taki sposób, że krajem zewnętrznym jest pewien zbiornik wody (np. staw), a kraje wewnętrzne są poletkami rozgrodzonymi groblami. Poletka tworzą wyspę na stawie — i to jedyną wyspę — bo są obrazem części powierzchni wielościanu W, otrzymanej przez usunięcie jednej ściany (tej, której obrazem w realizacji mapy jest staw), a ta jest oczywiście spójna. Załóżmy teraz, że przez przerwanie pewnych grobli zalaliśmy wodą wszystkie poletka działając przy tym tak efektywnie, jak matematykom przystoi, tzn. przerywając przy tym najmniejszą liczbę grobli. Obliczenie liczby A grobli przerwanych i liczby B grobli nie przerwanych doprowadzi nas do wzoru Eulera. Oczywiście $A+B = k$, bo wszystkich grobli jest tyle ile granic, więc także tyle, ile krawędzi w W. Poletek przeznaczonych do zalania było $s-1$. Przerwanie jednej grobli pozwala zalać nie więcej niż jedno poletko, a przy naszym wymaganiu efektywności działania każde przerwanie grobli musi powodować zalanie nowego poletka — zatem $A = s-1$. W celu obliczenia B zauważmy, że z ustalonego wierzchołka P można przejść po nienaruszonych groblach do dowolnego innego wierzchołka Q, przy czym można to zrobić tylko na jeden sposób, jeśli założyć, że żaden odcinek drogi nie jest przebywany więcej niż jeden raz (tzn. „tam i z powrotem").
Istotnie przejście z P do Q było możliwe przed rozpoczęciem nawadniania, a więc gdyby po zakończeniu było niemożliwe — to musiałaby istnieć grobla, która przed przerwaniem była z obu stron oblana wodą. Przerwanie takiej grobli nie zwiększyłoby liczby zalanych poletek, a więc byłoby sprzeczne z naszym założeniem efektywności postępowania.

Rozwiązanie zadania F 25

W ciągu godziny pierwsza rura napełnia jedną piątą basenu, druga opróżnia jedną dziesiątą basenu. Gdy obie rury są otwarte, to w ciągu godziny zapełnia się:

$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ pojemności basenu.

Do napełnienia basenu potrzeba dziesięciu godzin.
Czy fizyk może zgodzić się z tym rozumowaniem? Porównajcie Waszą opinię z rozważaniami zamieszczonymi na str. 17.

Gdyby zaś istniały dwie różne drogi po nienaruszonych groblach łączące P i Q, to musiałaby istnieć droga zamknięta utworzona z tych grobli, a więc ograniczony przez nią zespół poletek nie byłby zalany. Widzimy więc, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między nie przerwanymi groblami a wierzchołkami różnymi od P, zatem $B = w-1$.
Stąd

$$k = A+B = s-1+w-1 = s+w-2,$$

czyli
udowodniliśmy wzór Eulera,

$$s-k+w = 2.$$

Rzućmy jeszcze raz okiem na przeprowadzony dowód. Cała jego istota zawarta jest w rozumowaniu „hydrologicznym", dotyczącym nawadniania poletek przez przerywanie możliwie najmniejszej liczby grobli. Stąd łatwo zauważyć, że taki sam wzór jest prawdziwy dla dowolnej „mapy na globusie" — rozumianej jako układ krajów, granic i wierzchołków — przy czym granica jest częścią wspólną dwóch różnych krajów, zaś wierzchołek jest punktem przecięcia się różnych granic. Tak rozumiana „mapa" jest tworem ogólniejszym niż „mapa" otrzymana przez deformację powierzchni wielościanu (którą można by nazwać zdeformowaną siatką wielościanu). Dla takich ogólniejszych map wzór Eulera pozostaje słuszny, jeśli tylko żaden kraj nie rozdziela mapy na dwie rozłączne części — tzn. żaden kraj nie otacza więcej niż jednej wyspy.
Jeśli któryś z Czytelników uznał, że przedstawiony wyżej dowód wzoru Eulera jest zbyt mało matematyczny, to powinien zastanowić się nad większym sformalizowaniem całego postępowania. Zauważy wtedy niewątpliwie, że nie jest to wcale takie łatwe. A więc czasem proste intuicje nie dają się szybko ująć w formalne rozumowanie. Przytoczmy jeszcze dwa zadania związane z wzorem Eulera.
1. Udowodnić, że w każdym wielościanie wypukłym suma liczby ścian trójkątnych i liczby kątów trójściennych jest $\geqslant 8$.
2. Udowodnić, że liczbami ścian wielościanu foremnego mogą być tylko liczby 4, 6, 8, 12, 20.

2. Czytelnikowi zainteresowanemu dalszymi informacjami o wzorze Eulera i związaną z nim problematyką polecamy książki:
I. Dynkin, W. Uspienski: *Ciekawe zagadnienia matematyczne*. PZWS, W-wa 1956.
H. Rademacher, O. Toeplitz: *O liczbach i figurach*. PWN, W-wa 1956 r.
R. Courant, H. Robbins: *Co to jest matematyka*. PWN, W-wa 1959 r.

Zadania

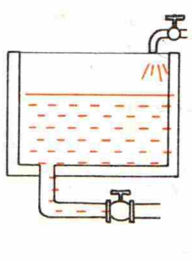
Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 73. Jaka jest maksymalna liczba wyrazów, które może mieć po wykonaniu redukcji wyrazów podobnych wielomian n-tego stopnia m zmiennych?
(Stopniem wielomianu wielu zmiennych nazywamy największy ze stopni występujących w nim jednomianów, stopniem zaś jednomianu $x_1^{a_1}x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}$ nazywamy liczbę $a_1+a_2+ \dots +a_k$).
Rozwiązanie na stronie 15.

M 74. Dany jest trójkąt ABC, którego środkowe $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ przecinają się w punkcie G. Udowodnić, że jeżeli promienie kół wpisanych w trójkąty AGE i BGD są równe, to $AC = BC$.
Rozwiązanie na stronie 16.

M 75. Proste równoległe do boków trójkąta i przechodzące przez jego punkt wewnętrzny O podzieliły ten trójkąt na trzy trójkąty i trzy równoległoboki. Iloczyn pól trójkątów wynosi T. Obliczyć iloczyn pól równoległoboków.
Rozwiązanie na stronie 5.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI



F 25. Pamiętacie na pewno ze szkoły podstawowej klasyczne zadanie o basenie:
„Do basenu prowadzą dwie rury. Pierwsza może napełnić basen w ciągu 5 godzin, druga może go opróżnić w ciągu 10 godzin. W jakim czasie można napełnić basen, jeżeli otworzy się obie rury równocześnie?" (patrzcie, rysunek obok).
Na stronie 7 zamieszczamy rozwiązanie od wieków pokutujące w podręcznikach szkolnych. Przyjrzyjcie się temu rozwiązaniu jako fizycy.