Wielościany regularne, półregularne i równoforemnościenne

Pragniemy z okazji Świąt ofiarować Czytelnikom pełną listę „bardziej prawidłowych" wielościanów wypukłych — tj. wielościanów wymienionych w tytule — wraz ze wskazówkami, jak układa się taką listę.
Mówimy, że wielościan ma *jednakowe ściany*, jeżeli każda z nich ma jednakową liczbę krawędzi. Mówimy (niezupełnie analogicznie), że wielościan ma *jednakowe naroża*, jeżeli, dla dowolnego n, każdy wierzchołek należy do tej samej liczby ścian n-kątnych. Wielościany o jednakowych narożach nazywamy *półregularnymi*. Wielościan półregularny o ścianach będących wielokątami foremnymi nazywamy *archimedesowym*. Wielościany półregularne o jednakowych ścianach nazywamy *regularnymi*. Wielościan regularny o ścianach foremnych nazywamy *platońskim*. Wielościany o jednakowych ścianach foremnych nazywamy *równoforemnościennymi*. Okazuje się, że dla każdego wielościanu półregularnego (i regularnego) istnieje wielościan archimedesowy (platoński) mający, dla dowolnego n, tę samą liczbę ścian n-kątnych w każdym narożu. Wszystkie rysunki będą przedstawiały takie właśnie wielościany.
Pozostawiamy Czytelnikowi do zbadania, jakie mogą być wielościany o ścianach jednakowych (nie koniecznie foremnych). Czy każdemu z nich odpowiada pewien wielościan równoforemnościenny?
Wielościan o w wierzchołkach, k krawędziach i s ścianach oznaczać będziemy symbolem $W^{(w,\,k,\,s)}$. Oczywiście (patrz «Delta», 1975, 5)

(1) $$w-k+s=2.$$

Rozwiązanie równań podobnych do tego wzoru (wzór Eulera) pozwoli nam ustalić naszą listę.

Wielościany regularne

Niech $W_{(m,\,l)}$ oznacza wielościan regularny o ścianach m-kątnych i narożach l-ściennych. Niech

$$W_{(m,\,l)} = W^{(w,\,k,\,s)}.$$

Aby uzyskać liczbę krawędzi wielościanu regularnego, zliczamy najpierw krawędzie każdej ze ścian:

(2) $$m\cdot s = 2\cdot k,$$

bo każda krawędź należy do dwóch ścian. Podobnie zliczamy krawędzie schodzące się w wierzchołku:

(3) $$l\cdot w = 2\cdot k.$$

Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymujemy

$$\frac{2k}{l} - k + \frac{2k}{m} = 2,$$

czyli

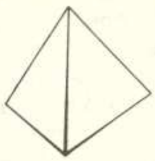
(4) $$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}.$$

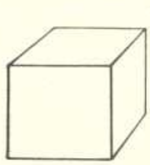
Ponieważ $k \geqslant 6$ (dlaczego?), więc m i l muszą spełniać nierówności

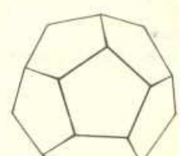
(5) $$\frac{1}{2} < \frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{3}.$$

Z tej nierówności znajdujemy l i m. Oczywiście $l \geqslant 3$ i $m \geqslant 3$

Niech więc na początek $l = 3$. Wówczas mamy





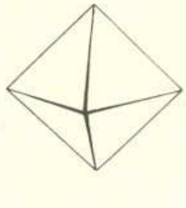


$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{3},$$

czyli

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{3},$$

a stąd $m \in \{3, 4, 5\}$.



Niech z kolei $l = 4$. Wówczas

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{3},$$

czyli

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{m} \leqslant \frac{5}{12},$$

a więc $m = 3$.

Analogicznie dla $l = 5$ otrzymujemy

$$\frac{3}{10} < \frac{1}{m} \leqslant \frac{7}{15},$$

a stąd $m = 3$.

Postępując analogicznie dla $l \geqslant 6$ otrzymamy

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{l} < \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{l},$$

skąd wynika $m < 3$, co jest niemożliwe. Innych rozwiązań nierówności (5) wobec tego nie ma. Czytelnik zechce sprawdzić, znajdując odpowiednie k, że każdemu z otrzymanych rozwiązań nierówności (5) odpowiada rozwiązanie równania (4).

Każdemu rozwiązaniu równania (4) odpowiadają (liczne) wielościany regularne i (przy ustalonej długości krawędzi) jeden wielościan platoński. Oto ich lista:

Nazwa wielościanu	l	m	w	k	s
czworościan	3	3	4	6	4
sześcian	3	4	8	12	6
dwunastościan	3	5	20	30	12
ośmiościan	4	3	6	12	8
dwudziestościan	5	3	12	30	20

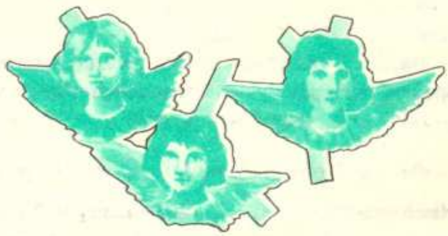
Wielościany półregularne

Zajmiemy się tylko tymi wielościanami półregularnymi, które nie mają jednakowych ścian — te bowiem zostały już rozpatrzone wyżej. Weźmy pod uwagę taki wielościan $W^{(w,\,k,\,s)}$. Oznaczmy przez s_i liczbę ścian l_i-kątnych w dowolnym (jednakowym z każdym innym) wierzchołku. Jeżeli wielościan ma n rodzajów ścian, to (jak łatwo sprawdzić — analogicznie do (3)):

(6) $$w\cdot\sum_{i=1}^{n} s_i = 2k.$$

Ponieważ liczba ścian l_i-kątnych w całym wielościanie wynosi $\frac{s_i}{l_i}\cdot w$, więc

(7) $$s = w\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{l_i}.$$



Wstawiając (6) i (7) do (1) otrzymujemy

$$w-\frac{w}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}s_i+w\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{l_i}=2,$$

czyli

(8) $$\left(2-\sum_{i=1}^{n}s_i\left(1-\frac{2}{l_i}\right)\right)\cdot w=4.$$

I z tego właśnie równania otrzymamy listę wielościanów istotnie półregularnych. Odrzucenie rozpatrzonych już wielościanów regularnych wyraża się w założeniu, że $n \geqslant 2$. Gdyby z kolei $n \geqslant 4$, to mielibyśmy

$$\sum_{i=1}^{n}s_i\left(1-\frac{2}{l_i}\right)\geqslant\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{5}\right)+\left(1-\frac{2}{6}\right)=\frac{21}{10}>2,$$

co jest sprzeczne z (8). Wobec tego n jest równe 2 lub 3. Dalej potrzebne nam będzie **spostrzeżenie**, że gdy l_1 jest liczbą nieparzystą, to $s_1 > 2$ lub $s_2 > 1$, lub $s_3 > 1$, czego sprawdzenie zostawiamy Czytelnikowi.

Wielościany półregularne o dwóch rodzajach ścian

Wzór (8) przybiera teraz postać

(8.1) $$\left(2-(s_1+s_2)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}\right)\right)w=4,$$

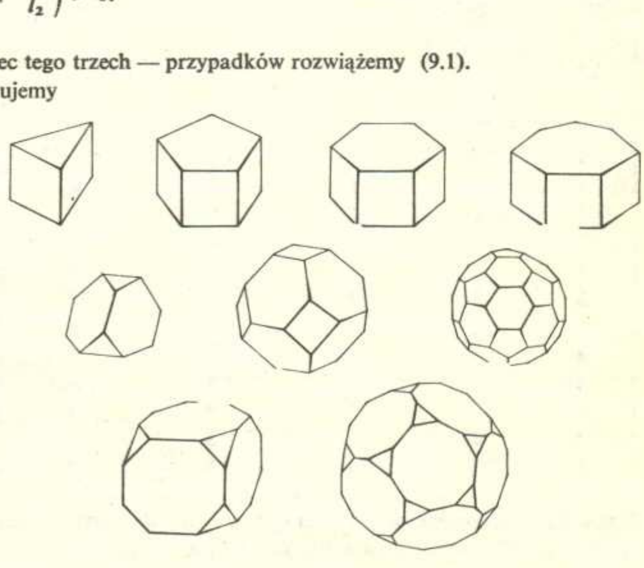
skąd wynika

(9.1) $$2-(s_1+s_2)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}\right)>0.$$

Ze względu na symetrię przyjmujemy, że $s_1 \geqslant s_2$.
Zauważmy, że $3 \leqslant s_1+s_2 < 6$ (dlaczego?). W każdym z możliwych — wobec tego trzech — przypadków rozwiążemy (9.1).
Niech $s_1+s_2=3$. Mamy więc $s_1=2$ i $s_2=1$. Wstawiając do (9.1) otrzymujemy

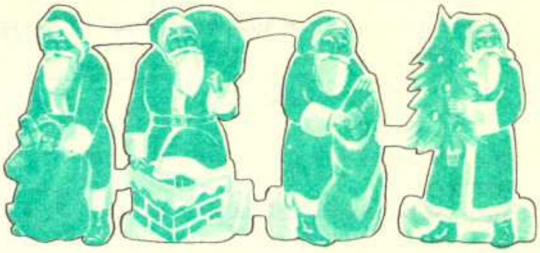
$$\frac{2}{l_1}+\frac{1}{l_2}>\frac{1}{2},$$

czyli $$\frac{1}{l_2}>\frac{l_1-4}{2l_1}.$$



Ponieważ zarówno l_1, jak i l_2 są większe od 2 (na pewno?), więc:
— Dla l_1 nieparzystego rozwiązań na mocy **spostrzeżenia** nie ma.
— Dla $l_1=4$ otrzymujemy $l_2>0$, a więc rozwiązaniem jest każda liczba naturalna $l_2>3$ i $l_2\neq4$. Otrzymaliśmy zatem całą rodzinę *graniastosłupów*. Spośród brył platońskich graniastosłupem jest sześcian
— Dla $l_1=6$ otrzymujemy warunek $l_2<6$, czyli $l_2\in\{3, 4, 5\}$.
— Dla $l_1=8$ mamy $l_2<4$, czyli $l_2=3$.
— Dla $l_1=10$ mamy $l_2<\frac{10}{3}$, czyli też $l_2=3$.
— Dla $l_1\geqslant12$ otrzymujemy $l_2<\frac{2l_1}{l_1-4}\leqslant\frac{24}{8}=3$, co jest niemożliwe.

Niech z kolei $s_1+s_2 = 4$. Wówczas $s_1 = s_2 = 2$ lub $s_1 = 3$ i $s_2 = 1$.



Gdy $s_1 = s_2 = 2$, otrzymujemy z (9.1)

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} > \frac{1}{2},$$

czyli

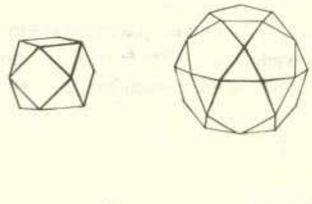
$$l_2 < \frac{2l_1}{l_1-2} = 2 + \frac{4}{l_1-2}.$$

Stąd

— dla $l_1 = 3$ otrzymujemy$_2 < 6$, czyli $l_2 \in \{4, 5\}$,

— dla $l_1 = 4$ ($l_1 = 5$) otrzymujemy $l_2 < 4$ $\left(l_2 < \frac{10}{3}\right)$, co daje $l_2 = 3$, a więc jest powtórzeniem poprzedniego rozwiązania,

— dla $l_1 \geqslant 6$ mamy $l_2 < 3$, co jest niemożliwe.

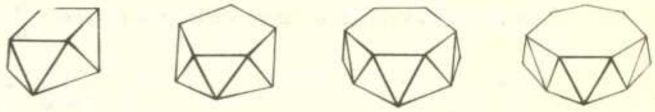


Gdy $s_1 = 3$ i $s_2 = 1$, otrzymujemy z (9.1)

$$\frac{3}{l_1} + \frac{1}{l_2} > 1,$$

czyli

$$\frac{1}{l_2} > \frac{l_1-3}{l_1}.$$



Stąd

— dla $l_1 = 3$ otrzymujemy całą rodzinę ***antygraniastosłupów*** ($l_2 > 3$). Spośród brył platońskich antygraniastosłupem jest ośmiościan.

— Dla $l_1 = 4$ mamy $l_2 < 4$, czyli $l_2 = 3$,

— dla $l_1 \geqslant 5$ otrzymujemy $l_2 < \frac{5}{2} < 3$, co jest niemożliwe.

Niech wreszcie $s_1+s_2 = 5$. Wówczas $s_1 = 3$ i $s_2 = 2$ lub $s_1 = 4$ i $s_2 = 1$.
Gdyby $s_1 = 3$ i $s_2 = 2$, to z (9.1) otrzymalibyśmy

$$\frac{3}{l_1} + \frac{2}{l_2} > \frac{3}{2},$$

czyli

$$l_2 < \frac{4}{3}\,\frac{l_1}{l_1-2}.$$

— Dla $l_1 = 3$ byłoby $l_2 < 4$, co jest wobec $l_1 \neq l_2$ niemożliwe,

— dla $l_1 \geqslant 4$ mamy $l_2 < \frac{8}{3} < 3$, co też jest niemożliwe.

Zatem $s_1 = 4$ i $s_2 = 1$. Z (9.1) otrzymujemy

$$\frac{4}{l_1} + \frac{1}{l_2} > \frac{3}{2},$$

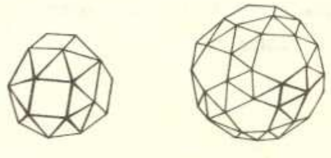
czyli

$$l_2 < \frac{2l_1}{3l_1-8}.$$

Stąd

— dla $l_1 = 3$ otrzymujemy $l_2 < 6$, czyli $l_2 \in \{4, 5\}$,

— dla $l_1 \geqslant 4$ mamy $l_2 < 2$, co jest niemożliwe.



W ten sposób zakończyliśmy wyliczenie wielościanów półregularnych o dwóch rodzajach ścian. Wyniki są zestawione w tabeli:

s_1+s_2	s_1	s_2	l_1	l_2	Liczba ścian l_1- i	l_2- -kątnych	w	k	s
3	2	1	4	$n \neq 4$	n	2	$2n$	$3n$	$n+2$
3	2	1	6	3	4	4	12	18	8
3	2	1	6	4	8	6	24	36	14
3	2	1	6	5	20	12	60	90	32
3	2	1	8	3	6	8	24	36	14
3	2	1	10	3	12	20	60	90	32
4	2	2	3	4	8	6	12	24	14
4	2	2	3	5	20	12	30	60	32
4	3	1	3	$n \neq 3$	$2n$	2	$2n$	$4n$	$2n+2$
4	3	1	4	3	18	8	24	48	26
5	4	1	3	4	32	6	24	60	38
5	4	1	3	5	80	12	60	150	92

Każdemu rozwiązaniu nierówności (9.1) odpowiada rozwiązanie równania (8.1). Proszę sprawdzić. Warto również pomyśleć, w jaki sposób obliczono liczby w kolumnach VI, VII, IX i X tabeli.

Wielościany półregularne o trzech rodzajach ścian

Wzór (8) ma w tym przypadku postać

(8.2) $$\left(2-(s_1+s_2+s_3)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}+\frac{s_3}{l_3}\right)\right)w=4,$$

skąd wynika

(9.2) $$2-(s_1+s_2+s_3)+2\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}+\frac{s_3}{l_3}\right)>0.$$

Tak jak poprzednio, $3 \leqslant s_1+s_2+s_3 < 6$, a zatem dla trzech możliwych przypadków rozwiążemy (9.2) przyjmując dla ustalenia uwagi, że $s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3$.

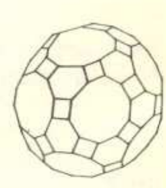
Niech $s_1+s_2+s_3 = 3$. Mamy więc $s_1 = s_2 = s_3 = 1$, co wraz z (9.2) daje

(10) $$\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}>\frac{1}{2}.$$

Wobec **spostrzeżenia** l_1, l_2 i l_3 są parzyste. Niech więc na początek $l_1 = 4$. Wówczas mamy $l_2 \geqslant 6$ (i $l_3 \geqslant 6$) oraz

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}>\frac{1}{4},$$

czyli $$l_3<\frac{4l_2}{l_2-4}.$$

Stąd

— dla $l_2 = 6$ mamy $l_3 < 12$, a więc $l_3 \in \{8, 10\}$,

— dla $l_2 = 8$ $(l_2 = 10)$ mamy $l_3 < 8$ $\left(l_3 < \frac{20}{3}\right)$, co daje nam $l_3 = 6$ i jest powtórzeniem rozwiązania poprzedniego.

Niech następnie $l_1 \geqslant 6$, $l_2 \geqslant 6$ i $l_3 \geqslant 6$. Wówczas jednak wbrew (10), mielibyśmy

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\leqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{10}=\frac{9}{40}<\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{l_1}.$$

Niech z kolei $s_1+s_2+s_3 = 4$. Mamy więc $s_1 = 2$ i $s_2 = s_3 = 1$, co wraz z (9.2) daje

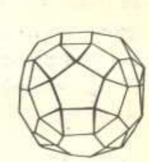
(11) $$\frac{2}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}>1.$$

Ze względu na **spostrzeżenie** l_1 jest parzyste. Niech na początek $l_1 = 4$.

Wówczas mamy

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}>\frac{1}{2},$$

czyli $$l_3<\frac{2l_2}{l_2-2}.$$



Stąd

— dla $l_2 = 3$ otrzymujemy $l_3 < 6$, a więc ponieważ jest $l_1 \neq l_3 \neq l_2$, to $l_3 = 5$,

— dla $l_2 = 5$ otrzymujemy $l_3 < \frac{10}{3}$, a więc $l_3 = 3$, co jest powtórzeniem rozwiązania poprzedniego,

— dla $l_2 \geqslant 6$ mamy $l_3 < 3$, co jest niemożliwe.

Niech następnie $l_1 \geqslant 6$. Wówczas jednak mielibyśmy

$$\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}<\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}\leqslant 1-\frac{2}{l_1}$$

wbrew (11).

I to już wszystko. Dla $s_1+s_2+s_3 = 5$ mamy bowiem wobec (9.2)

$$\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}+\frac{s_3}{l_3}>\frac{3}{2},$$

a więc tym bardziej $$\frac{s_1}{3}+\frac{5-s_1}{4}>\frac{3}{2},$$

z czego wynika, że $s_1 > 3$, a więc $s_1+s_2 < 2$, co jest niemożliwe.

Czytelnik zechce sprawdzić, że każdemu z rozwiązań nierówności (9.2) odpowiada rozwiązanie równania (8.2) oraz że prawidłowo wypełniliśmy poniższą tabelkę:

$s_1+s_2+s_3$	s_1	s_2	s_3	l_1	l_2	l_3	Liczba ścian l_1-,	l_2- i	l_3- -kątnych	w	k	s
3	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	72	26
3	1	1	1	4	6	10	30	20	12	120	180	62
4	2	1	1	4	3	5	30	20	12	60	120	62

Wielościany równoforemnościenne

Z definicji ściany ich są wszystkie i-kątami foremnymi. Ponieważ w jednym wierzchołku zbiegają się co najmniej 3 ściany, więc z obliczenia ich kątów przy tym wierzchołku wynika, że

$$3 \cdot \frac{i-2}{i} \cdot \pi < 2\pi,$$

a więc $i < 6$.
Niech na początek $i = 5$. Ponieważ

$$4 \cdot \frac{5-2}{5} \cdot \pi \geqslant 2\pi,$$

w każdym wierzchołku zbiegają się dokładnie 3 ściany, więc poszukiwanym wielościanem okazuje się bryła platońska — dwunastościan.
Niech następnie $i = 4$. Analogicznie mamy

$$4 \cdot \frac{4-2}{4} \cdot \pi \geqslant 2\pi,$$

więc poszukiwanym wielościanem okazuje się sześcian.
Niech wreszcie $i = 3$. Nierówność

$$i \cdot \frac{3-2}{3} \cdot \pi < 2\pi$$

ma, wobec $i \geqslant 3$, trzy rozwiązania: 3, 4 i 5. Oznaczmy przez w_j liczbę wierzchołków, w których zbiega się j ścian. Przy tym oznaczeniu

$$w = w_3 + w_4 + w_5,$$

ponieważ zaś ściany są trójkątami, więc

$$2k = 3s;$$

zliczając wreszcie krawędzie każdego wierzchołka mamy

$$2k = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5.$$

Po wstawieniu tych zależności do wzoru (1) otrzymamy

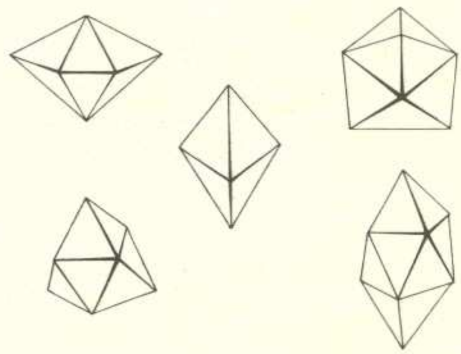
$$6(w_3 + w_4 + w_5) - 3(3w_3 + 4w_4 + 5w_5) + 2(3w_3 + 4w_4 + 5w_5) = 12,$$

czyli

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12. \tag{12}$$

Równanie (12) ma 19 rozwiązań (każde z nich jest trójką złożoną z liczb naturalnych i zer). Freudenthal i van der Waerden wykazali, że tylko ośmiu z tych rozwiązań odpowiadają wielościany wypukłe. Jednakże nikt dotychczas nie umie podać takiego warunku geometrycznego, aby odpowiadające mu równania czy nierówności, dołączone do równania (12), eliminowały owych 11 „złych" rozwiązań. Do dziś eliminuje się je indywidualnie, znajdując sposób na każde z osobna. Bardzo polecamy zastanowienie się nad tym — rozwiązanie byłoby wartościowym osiągnięciem.

Zostawiając Czytelnikom wyliczenie wszystkich rozwiązań podamy tu tylko te „dobre", dla których istnieją odpowiednie wielościany. W podanej niżej tabelce trzy wiersze, a mianowicie odpowiadające rozwiązaniom (4, 0, 0), (0, 6, 0) i (0, 0, 12), to bryły platońskie: czworościan, ośmiościan i dwudziestościan. Wygląd pozostałych podany jest na rysunkach; który odpowiada któremu wierszowi tabelki?



w_3	w_4	w_5	w	k	s
4	0	0	4	6	4
2	3	0	5	9	6
0	6	0	6	12	8
0	5	2	7	15	10
0	4	4	8	18	12
0	3	6	9	21	14
0	2	8	10	24	16
0	0	12	12	30	20

Jako świąteczną rozrywkę polecamy sklejenie brył, o których mówiliśmy. Sądzimy, że tabelki zawierają dostateczną do tego celu porcję informacji. Radzimy nie rysować całych tzw. siatek, a raczej sklejać oddzielnie poszczególne wierzchołki i dopiero potem łączyć je w cały wielościan.