

O teorii dyfrakcji Younga-Rubinowicza

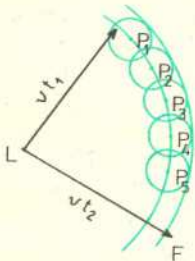
Prof. dr Bohdan KARCZEWSKI



Wojciech Rubinowicz (1889-1974)

Nie popełnię chyba zbyt wielkiego błędu mniemając, iż każdemu z Czytelników znana jest tzw. zasada Huygensa, sformułowana przez tego znakomitego badacza holenderskiego w 1678 r.

Chcąc jednak mieć pewność, że wszystkie dalsze rozważania nie wzbudzą zbyt wielu wątpliwości, pozwolę sobie tę zasadę przypomnieć. Orzeka ona, że wszystkie punkty powierzchni falowej w chwili t_1 można uważać za źródła fal kulistych, przy czym położenie powierzchni falowej w chwili $t_2 > t_1$ dane jest przez powierzchnię styczną do tych elementarnych fal kulistych. Źródła, o których tu mowa, nazywamy często źródłami wtórnymi. Przypuśćmy, iż pierwotne źródło fali monochromatycznej znajduje się w punkcie L. W pewnej chwili t_1 powierzchnia falowa jest po prostu powierzchnią kulistą o promieniu vt_1 , gdzie v oznacza prędkość rozchodzenia się fali. Na pytanie, gdzie znajdzie się powierzchnia falowa w chwili t_2 , odpowiada rys. 1, sporządzony ściśle w duchu zasady Huygensa.

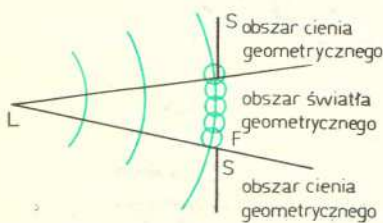


Rys. 1.
Ilustracja zasady Huygensa. Punkty P_1, P_2, P_3, \dots są właśnie wtórnymi źródłami fal kulistych. Fale te interferując ze sobą tworzą wypadkową falę kulistą, której powierzchnia falowa oznaczona jest przez F.

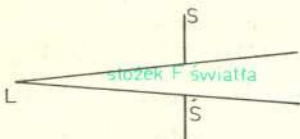
Zasada Huygensa brzmi bardzo przekonująco i nader skutecznie apeluje do naszej intuicji. Nic więc dziwnego, że przytaczana jest ona w każdym szanującym się podręczniku fizyki. Z jej pomocą uzasadnia się w prosty, modelowy sposób propagację fal, prawa ich odbicia i załamania a także i zjawiska dyfrakcji fal. Tej ostatniej klasie zjawisk poświęćmy w dalszym ciągu uwagę szczególną. Wyobraźmy sobie, że pierwotne źródło promieniowania znajduje się znowuż w punkcie L. W pewnej odległości od źródła umieszczamy ekran S, w którym wycięty jest otwór F (rys. 2). Zakładamy przy tym, iż ekran S pochłania całkowicie padającą nań falę. Z bardzo dobrym przybliżeniem możemy również przyjąć, iż dla źródła L dostatecznie odległego od ekranu wycinek kulistej powierzchni falowej docierającej do otworu F pokrywa się z powierzchnią tego otworu. Rys. 2 dowodnie ilustruje, w jaki sposób fala przenika do obszaru tzw. cienia geometrycznego, czyli do tego obszaru, w którym zgodnie z prawami optyki geometrycznej żadnego ruchu falowego być nie powinno. Każdy chyba przyzna, iż zasada Huygensa jasno tłumaczy ugięcie fali. Jako ciekawostkę odnotujemy fakt, iż sam Huygens, słusznie uważany za jednego z twórców falowej teorii światła, w dyfrakcję światła w ogóle nie wierzył. Wyjaśnienie zjawisk ugięcia fal, przedstawione powyżej, zawdzięczamy wybitnemu fizykowi francuskiemu A. Fresnelowi (1778-1827 r.). W 1818 r. Fresnel opierając się na zasadzie Huygensa ilościowo opisał zjawiska dyfrakcji. Ostateczny i możliwie ścisły kształt matematyczny nadał ideom Huygensa w 1882 r. niemiecki fizyk S. Kirchhoff. Gwoli ścisłości zaznaczmy, iż Kirchhoff w swej teorii nawet rozszerzył pierwotne idee Huygensa, wprowadzając oprócz wtórnych pojedynczych źródeł fal kulistych również tzw. wtórne źródła podwójne, o których w zasadzie Huygensa w ogóle nie ma mowy. Zgodnie z rzeczywistością w teorii Kirchhoffa nie występują tzw. fale wsteczne, do których istnienia nieuchronnie prowadzi zasada Huygensa (patrz rys. 1 i 2). Wg Kirchhoffa pole falowe w punkcie obserwacji P położonym za ekranem S (rys. 3) powstaje w wyniku interferencji fal emitowanych przez wtórne źródła pojedyncze i podwójne rozłożone z określonymi gęstościami na nieskończenie małych elementach powierzchniowych dF otworu uginającego. Jeśli zatem całkowitą falę emitowaną przez element powierzchni dF oznaczamy przez du — **nie jest to już fala kulista** — to całe pole falowe w punkcie P dane będzie przez

$$(1) \quad u(P) = \iint_F du,$$

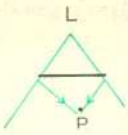
gdzie całka podwójna, będąca naturalnym uogólnieniem całki pojedynczej,



Rys. 2.
Jakościowe wyjaśnienie zjawiska dyfrakcji fali na otworze F przy pomocy zasady Huygensa. Fala powstająca w wyniku działania źródeł wtórnych na F nie będzie już falą kulistą!



Rys. 3.



Rys. 4.
Schematyczne przedstawienie dyfrakcji fali kulistej na włosie, oznaczonym grubą czarną kreską. P oznacza punkt obserwacji.



rozciągnięta jest na powierzchnię otworu uginającego. Ścisłe wyrażenie na du proporcjonalne do dF jest zbyt złożone; dlatego go tutaj nie podajemy. Mimo swego przybliżonego charakteru teoria Kirchhoffa jest w zadziwiająco dobrej zgodności z doświadczeniem, szczególnie w tych obszarach, gdzie zjawiska ugięcia zaznaczają się najsilniej, a więc w pobliżu granicy cienia geometrycznego lub, innymi słowy, w pobliżu powierzchni stożka światła (patrz rys. 3). W podręcznikach i w literaturze naukowej teoria Kirchhoffa zdobyła sobie trwałe prawa obywatelskie, w dziedzinie zaś dyfrakcji światła — stanowisko niemal monopolistyczne. Bez przesady można powiedzieć, iż nurt badań wypływający z idei Huygensa i prac Kirchhoffa był i jest w dziedzinie dyfrakcji dominujący. Tymczasem, niezależnie od tego nurtu, rozwijał się nurt zupełnie inny, oparty na zasadniczo odmiennych przesłankach ideowych. Jego inicjatorem był sławny uczyony angielski T. Young (1773–1829), słusznie uważany za jednego z współtwórców falowej teorii światła. Otóż w 1803 r. a więc jeszcze przed Fresnelem, Young, po raz pierwszy w historii fizyki, próbował opisać zjawiska dyfrakcji światła traktując światło jako falę. Rozważał on ugięcie światła na włosie.

Aby wytłumaczyć powstawanie obrazu dyfrakcyjnego, utworzonego w tym przypadku z jasnych i ciemnych prążków, Young wysunął hipotezę wg której prążki w obszarze cienia geometrycznego powstają w wyniku interferencji fal w pewien sposób odbitych od dwóch „krawędzi” włosa (patrz rys. 4), od jego „brzegów”. Występowanie natomiast prążków w obszarze światła geometrycznego tłumaczy się interferencją fali wprost padającej ze źródła L z falą odbitą od krawędzi włosa. Występowanie tych fal odbitych możemy przypisać działaniu jakichś źródeł wtórnych rozmieszczonych na krawędzi otworu uginającego F. Youngowska interpretacja ugięcia światła również apeluje skutecznie do naszej wyobraźni i intuicji. Nie wzbudza wewnętrznych sprzeciwów. Miała ona jednak pierwotnie charakter czysto jakościowy i, być może, właśnie dlatego nie zdobyła sobie takiego uznania, jakim od samego początku cieszyła się zasada Huygensa. Gdy Fresnel opierając się na zasadzie Huygensa sformułował swą teorię dyfrakcji, potwierdzoną od razu przez doświadczenie, Young, dowiedziawszy się o tym, zrezygnował całkowicie ze swojej interpretacji zjawisk dyfrakcji światła. Dał zresztą temu wyraz w liście do Fresnela z 16.10.1818 r. Tragiczna decyzja Younga spowodowała, iż na niemal 100 lat jego idee zapadły w głęboką niepamięć. I choć w latach późniejszych różni badacze, a w ich liczbie i Kirchhoff, byli bliscy idei Younga, to jednak z zapomnienia idei tej nie wydobyli. Dopiero w 1917 r. polski fizyk W. Rubinowicz (1889–1974) dokonał pełnej rehabilitacji poglądów Younga na istotę zjawisk dyfrakcji.

Rubinowicz ściśle wykazał, że w ramach teorii Kirchhoffa całkowite pole falowe za ekranem S (patrz rys. 3) można przedstawić w postaci sumy fali wprost padającej i fali brzegowej, pochodzącej od krawędzi otworu uginającego. Zatem, jeśli pole falowe w punkcie P oznaczmy przez $u(P)$ (porównaj wzór (1)), to

$$(2) \quad u(P) = \varepsilon u_G(P) + u_B(P)$$

gdzie $\varepsilon = 1$ lub 0 zależnie od tego, czy punkt P leży w obszarze światła geometrycznego, czy też cienia; u_G oznacza falę wprost padającą (w rozważanym przypadku $u_G = \frac{e^{ikR}}{R}$, gdzie R oznacza odległość punktu L od P); u_B oznacza falę ugiętą, emitowaną przez odpowiednie źródła wtórne rozłożone z określoną gęstością na brzegu otworu uginającego F.

Z matematycznego punktu widzenia możemy powiedzieć, że W. Rubinowicz dwuwymiarową całkę Kirchhoffa po otworze uginającym F przekształcił w jednowymiarową całkę po brzegu B tego otworu. Jeśli teraz w pełnej analogii do rozważań poprzedzających wzór (1) przez du_B oznaczamy falę emitowaną przez element długości ds łuku krzywej ograniczającej F (nie jest to już fala kulista!), to całe ugięte pole falowe w punkcie P dane będzie przez

$$(3) \quad u_B(P) = \int_B du_B,$$

gdzie całkowanie wykonujemy po brzegu (krawędzi) otworu uginającego F. Ścisłe wyrażenie na du_B proporcjonalne do ds jest dosyć skomplikowane i dlatego nie przytaczamy go tutaj.

Możemy zatem powiedzieć, że jeśli punkt P leży w obszarze światła geometrycznego, to (wzór (2)) pole falowe w P powstaje w wyniku interferencji fali wprost padającej u z całkowitą falą ugiętą u_B (wzór (3)). Jeśli natomiast



Rozwiązanie zadania M72

n punktów wyznacza $\frac{1}{2} n(n-1)$ odcinków

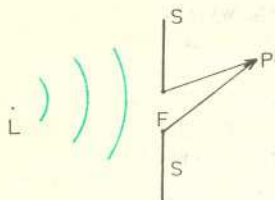
które mają $\frac{1}{2} n(n-1)$ symetralnych. Niech

X będzie punktem nie należącym do żadnej z tych symetralnych. Wszystkie odległości punktu X od danych punktów są więc różne. Jeśli oznaczmy dane punkty przez A_1, A_2, \dots, A_n tak, by

$$XA_1 < XA_2 < \dots < XA_n,$$

to koło o środku X i promieniu r , gdzie $XA_k < r < XA_{k+1}$, zawiera w swym wnętrzu dokładnie k spośród danych punktów.

Można oczywiście zażądać, by promień koła był liczbą wymierną (lub niewymierną).



Rys. 5.
Ilustracja zjawiska dyfrakcji fali kulistej na otworze F wg teorii Younga-Rubinowicza. Punkt P leży w cieniu geometrycznym. Strzałki przedstawiają kierunki propagowania się dwóch cząstkowych fal brzegowych u_B , pochodzących od dwóch elementów krawędziowych ds.



punkt P leży w cieniu geometrycznym, to pole falowe w P powstaje w wyniku interferencji cząstkowych fal ugiętych, emitowanych przez odpowiednie źródła wtórne rozłożone na brzegu B otworu uginającego F (wzór (3), rys. 5). Stwierdzenia te są ściślij, matematycznym wyrazem idei Younga. W dalszych badaniach nad falą ugiętą u_B Rubinowicz pokazał, iż fala ta na granicy stożka światła jest nieciągła. Nieciągłość ta jest jednak skompensowana przez skok, jakiego na tejże granicy doznaje fala wprost padająca u_G (patrz wzór (2)). W wyniku tego całkowity ruch falowy $u(P)$ jest oczywiście ciągły, jak też być powinno. Rubinowicz pokazał również, co należy rozumieć przez „odbicie” fali wprost padającej od krawędzi B otworu uginającego, o którym mówił Young. Okazało się przy tym, że źródła wtórne rozłożone na różnych elementach długości ds krzywej B emitują promieniowanie o różnym natężeniu. Promieniowanie pewnych elementów ds jest szczególnie intensywne. Elementy te nazwał Rubinowicz elementami czynnymi i wykazał, że w pierwszym przybliżeniu fala ugięta u_B powstaje w wyniku interferencji fal emitowanych przez owe elementy czynne.

Tak więc Wojciech Rubinowicz nie tylko przywrócił ideom Younga prawa obywatelskie, ale wprowadził do nich nieodzowne zmiany i zbadał wszystkie wnioski stąd wypływające. Dodajmy tu jeszcze, że teoretyczne przewidywania Rubinowicza zostały w całej rozciągłości potwierdzone przez doświadczenie. W dalszych pracach Rubinowicza i Jego uczniów okazało się, iż idee Younga można z powodzeniem zastosować nie tylko do dyfrakcji światła, ale i do badań nad zjawiskami ugięciowymi innych rodzajów fal. Fundamentalne wyniki W. Rubinowicza przyniosły Mu sławę i trwałe międzynarodowe uznanie. Znalazły też swoje pełne odbicie w literaturze naukowej, w której powszechnie przyjął się termin: teoria Younga-Rubinowicza. Pragnąc być obiektywnymi i chcąc oddać każdemu to, co mu się należy, powinniśmy dzisiaj mówić i pisać nie tylko o teorii dyfrakcji Huygensa-Kirchhoffa, ale i o pięknej teorii Younga-Rubinowicza. Obie te teorie, choć tak różne od siebie, są przecież w pełni równoważne.

Rozwiązanie zadania F 24

Równanie ruchu bryły sztywnej jest postaci:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

gdzie \vec{M} oznacza moment przyłożonej siły, a \vec{L} moment pędu ciała. Zastanówmy się najpierw, czy w przypadku opisanego ruchu moment pędu zmienia się, a jeżeli tak, to w jaki sposób.

Ruch obrotowy płyty odbywa się wokół osi nie będącej osią symetrii ciała. Wygodniej jest rozłożyć ten ruch na ruchy wokół trzech osi symetrii płyty. Wprowadzamy układ współrzędnych xyz związany sztywno z płytą. Oś z niech będzie prostopadła do płaszczyzny płyty, a oś x niech leży w płaszczyźnie określonej przez wektor $\vec{\omega}$ i oś z .

Liczymy składowe wektora $\vec{\omega}$ oraz \vec{L} w tym układzie. Korzystamy ze związku: $L_i = I_i \omega_i$, $i = x, y, z$, gdzie I_i jest momentem bezwładności ciała względem danej osi. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L_x &= 1/4 MR^2 \omega \cos \alpha \\ L_y &= 0 \\ L_z &= 1/2 MR^2 \omega \sin \alpha \end{aligned}$$

Ponieważ wartości momentów bezwładności względem osi x i z są różne, wypadkowy kierunek momentu pędu \vec{L} nie pokrywa się z kierunkiem $\vec{\omega}$. Długość wektora \vec{L} jest stała.

Układ xyz obraca się wraz z płytą wokół kierunku wyznaczonego przez wektor $\vec{\omega}$. Również koniec wektora \vec{L} będzie zataczał okrąg wokół kierunku $\vec{\omega}$ w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{\omega}$ z prędkością kątową ω . Oznacza to, że moment pędu jako wektor ulega zmianie. Zauważcie analogię z ruchem jednostajnym punktu materialnego po okręgu. W rozważanym przypadku rolę wektora położenia odgrywa wektor momentu pędu. Dla ruchu po okręgu zmianę wektora położenia \vec{r} w czasie opisywało równanie:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Podobnie dla wektora momentu pędu:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Symbol \times oznacza w obu wzorach iloczyn wektorowy.

Oczywiście moment siły związany ze zmianą momentu pędu skierowany jest w danej chwili prostopadle do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{\omega}$ i \vec{L} . Natomiast para sił wywołująca ten moment pochodzi od sił nacisku wsporników A i B. Siły te są skierowane prostopadle do osi obrotu i leżą w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory $\vec{\omega}$ i \vec{L} .

Wartość każdej siły nacisku wynosi:

$$N = \frac{|\vec{M}|}{h} = \frac{|\vec{\omega} \times \vec{L}|}{h} = \frac{|\omega_z L_x - \omega_x L_z|}{h} = \frac{MR^2 \omega^3 \sin 2\alpha}{8h}$$

