Jeżeli teraz określimy równik naszej sfery jako krzywą $r(t) = (R\cos t,\ R\sin t,\ 0)$ (dla $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, R jest promieniem sfery) i złożymy przekształcenie $r:\langle 0, \pi\rangle \to S$ z $g:S \to C$, to otrzymamy krzywą $w(t)$ zamkniętą (bo $r(0) = r(2\pi)$), nie przechodzą przez 0 (bo $g(x) \neq 0$ dla każdego $x \in S$), i wreszcie taką, że $w(t+\pi) = g(R\cos(t+\pi),\ R\sin(t+\pi),\ 0) =$
$= g(-R\cos t, -R\sin t, 0) = g(-(R\cos t,\ R\sin t,\ 0)) = -g(r(t)) = -w(t)$.
Wobec tego $\operatorname{ind} w(t) = 2k+1 \neq 0$.
Ale $w(t)$ jest elementem ciągłej rodziny krzywych $w_\varrho(t)$ zdefiniowanych wzorem:

$$w_\varrho(t) = g(\sqrt{R^2-\varrho^2}\cos t,\quad \sqrt{R^2-\varrho^2}\sin t,\ \varrho)$$

(jest tu oczywiście $w_0(t) = w(t)$).
Warto przez chwilę zastanowić się nad geometryczną interpretacją rodziny $w_\varrho(t)$. Otóż krzywa $r_\varrho(t) = (\sqrt{R^2-\varrho^2}\cos t,\ \sqrt{R^2-\varrho^2}\sin t,\ \varrho)$ jest równoleżnikiem sfery leżącym na wysokości ϱ nad równikiem, a krzywa $w_\varrho(t)$ opisuje „zachowanie się" przekształcenia g na tym równoleżniku.
Pozostaje już teraz tylko zauważenie, że z jednej strony $\operatorname{ind} w_R(t) = \operatorname{ind} w_0(t) \neq 0$, z drugiej strony jednak „krzywa" $w_R(t) = g(0, 0, R)$ ma obraz złożony z jednego punktu i wobec tego $\operatorname{ind} w_R(t) = 0$. Tak więc z założenia, że dla każdej pary punktów antypodycznych $x,\ -x$ jest: $f(x) \neq f(-x)$, doszliśmy do sprzeczności — wykazując tym samym istnienie co najmniej jednej pary $(x,\ -x)$ takiej, że $f(x) = f(-x)$, czym zakończyliśmy dowód.
Powiedzmy na zakończenie słów parę o (trudnych już w dowodzie) uogólnieniach naszego twierdzenia. Jedno z nich, naturalne w świetle zadania będącego właściwie uproszczoną wersją twierdzenia o antypodach i naszego artykułu, brzmi tak:
Jeżeli S jest sferą w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej oraz f jest przekształceniem ciągłym S w przestrzeń n-1-wymiarową, to istnieje para punktów antypodycznych x i y takich, że $f(x) = f(y)$.
Bardziej nieoczekiwane jest twierdzenie, w którego założeniach znika symetria. Sformułujemy je w przypadku dwuwymiarowym.
Jeżeli $h:S \to S$ jest przekształceniem ciągłym sfery na siebie takim, że $h(h(x)) = x$ dla każdego $x \in S$ (przekształcenia takie nazywa się inwolucjami: symetria jest oczywiście inwolucją) *i f jest przekształceniem ciągłym sfery na płaszczyznę, to istnieje punkt x taki, że $f(x) = f(h(x))$.*
Być może, ktoś z Czytelników spróbuje udowodnić takie twierdzenie o okręgu. Uprzedźmy jednak, że i w tym przypadku dowód jest dość trudny.

Zadania

Redaguje dr Andrzej Ziemiński

F23. Naczynie z wodą o temperaturze bliskiej 0°C zostało umieszczone pod kloszem pompy próżniowej o dużej wydajności pompowania. Opiszcie zjawiska jakie wystąpią po uruchomieniu pompy. Można przyjąć, że wszystkie procesy odbywają się bez wymiany ciepła z otoczeniem, tzn. adiabatycznie. Ciepło parowania wody w temperaturze 0°C wynosi 596 $\frac{\text{cal}}{\text{g}}$, ciepło krzepnięcia wody 79,8 $\frac{\text{cal}}{\text{g}}$, a ciepło sublimacji lodu 677 $\frac{\text{cal}}{\text{g}}$.
(Zadanie II-go stopnia XII Olimpiady Fizycznej — 1963 rok)
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje mgr Andrzej Mąkowski

M67. Łącząc środki sąsiednich boków pewnego czworokąta otrzymano czworokąt podobny do wyjściowego. Jaki to czworokąt?
Rozwiązanie na str. 14

M68. Przeciąć kwadrat na pięć części tak, by można z nich było ułożyć dwa kwadraty.
Rozwiązanie na str. 10

M69. Wykazać, że odległość dowolnego punktu ćwiartki okręgu od jego rzutu na jej cięciwę jest średnią geometryczną odległości tego punktu od jego rzutów prostokątnych na styczne do okręgu poprowadzone z końców rozważanej ćwiartki.
Rozwiązanie na str. 8