Twierdzenie o antypodach

Mgr Krzysztof NOWIŃSKI

Czy skłonny jesteś, Czytelniku, uznać za oczywiste takie oto 3 fakty:
1) Rozpłaszczywszy w dowolny sposób (nie rozdzierając) gumowy balonik znajdziemy na jego powierzchni co najmniej dwa punkty, które przed spłaszczeniem były średnicowo przeciwległe (antypodyczne), a po spłaszczeniu upadły na siebie?
2) W każdej chwili istnieją na Ziemi 2 punkty antypodyczne, w których zarówno temperatura jak i ciśnienie są jednakowe?
3) Każdą kanapkę z masłem i szynką można jednym cięciem płaskiego noża przekroić tak, aby przepołowić chleb, masło i szynkę?
Jeżeli tak — gratulujemy wyobraźni. Jeżeli nie — sprobujemy się przekonać o ich prawdziwości, i co może bardziej zaskakujące, o ich bliskim związku.
Fakty te wynikają z udowodnionego w 1937 roku przez znanych polskich matematyków, Borsuka i Ulama,

TWIERDZENIA O ANTYPODACH

mówiącego, że:
Jeżeli S jest sferą w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, a f — jej przekształceniem ciągłym w płaszczyznę, to istnieje para punktów x i y symetrycznych względem środka sfery S (antypodycznych) *i takich, że* $f(x) = f(y)$.

Przestrzeń euklidesowa — przestrzeń, której elementami są układy n liczb rzeczywistych $(x_1, \dots, x_n)$, odległość $\varrho((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ określa się wzorem $\sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$, a sferą nazywa się jak zwykle miejsce geometryczne punktów odległych o ustaloną liczbę R od punktu x_0 (środka).

Widać już teraz, że pierwszy fakt jest po prostu „naiwnym" sformułowaniem naszego twierdzenia. Z kolei traktując powierzchnię Ziemi jako sferę, a temperaturę t i ciśnienie p jako współrzędne obrazu punktu x na płaszczyźnie (czyli pisząc $f(x) = (t(x), p(x))$), otrzymamy znów sytuację opisaną w twierdzeniu o antypodach — ciągła zależność temperatury i ciśnienia powietrza w ustalonej chwili od punktu na powierzchni Ziemi jest chyba oczywista. Fakt trzeci nie jest już tak bezpośrednim wnioskiem, jego dowodowi poświęcimy drugą część artykułu
Zanim zaczniemy dowód twierdzenia o antypodach, przypomnimy kilka faktów z artykułu *Urojony sprzymierzeniec* M. Skwarczyńskiego («Delta», 1974, 3).
Płaszczyznę, o której mowa w twierdzeniu, będziemy traktować jako zbiór C liczb zespolonych. W cytowanym artykule został zdefiniowany *przyrost logarytmu* zespolonego na krzywej $z(t)$ określonej na przedziale a, b i o wartościach w płaszczyźnie zespolonej z usuniętym początkiem układu. Można tam znaleźć również definicję indeksu krzywej zamkniętej $z(t)$. (Jest to ścisła definicja liczby obiegów punktu 0 przez krzywą $z(t)$).
Podstawową własność indeksu krzywej opisuje następujący fakt: Jeżeli $w_r(t)$ jest ciągłą rodziną krzywych zamkniętych, taką, że $w_r(t) \neq 0$ dla każdego r i t, to $\operatorname{ind} w_r(t)$ nie zależy od r. Własność ta została też zasygnalizowana (i wykorzystana przy dowodzie podstawowego twierdzenia algebry) w *Urojonym sprzymierzeńcu.* Pokażemy jeszcze, że jeżeli $w(t)$ jest krzywą zamkniętą, określoną na przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$, i taką, że $w(t+\pi) = -w(t)$, to $\operatorname{ind} w(t)$ jest liczbą nieparzystą.
Rozpatrzmy w tym celu krzywą $z(t)$ $t \in \langle 0, \pi \rangle$ taką, że $e^{z(t)} = w(t)$ (patrz *Urojony sprzymierzeniec*). Ponieważ $e^{z(\pi)} = -e^{z(0)}$, $z(\pi) = z(0) + (2k+1)\pi i$.
Zauważmy teraz, że przedłużając krzywą z na odcinek $\langle \pi, 2\pi \rangle$ wzorem $z(t) = z(t-\pi) + (2k+1)\pi i$ otrzymamy
$e^{z(t)} = e^{z(t-\pi)+(2k+1)\pi i} = e^{z(t-\pi)} \cdot e^{(2k+1)\pi i} = -e^{z(t-\pi)} = -w(t-\pi)$, co zgadza się z założeniem o krzywej w. Krzywa $z(t)$ określona na przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ spełnia więc warunek $e^{z(t)} = w(t)$ i wobec tego

$$\operatorname{ind} w(t) = \frac{z(2\pi) - z(0)}{2\pi i} = \frac{2(2k+1)\pi i}{2\pi i} = 2k+1.$$

Możemy już teraz przystąpić do dowodu naszego twierdzenia. Ustalmy przede wszystkim układ współrzędnych tak, aby środek sfery znalazł się w początku układu. Parami punktów symetrycznych względem środka sfery będą wtedy po prostu pary postaci x i $-x$ (czyli (x_1, x_2, x_3) i $(-x_1, -x_2, -x_3)$). Załóżmy teraz, że teza naszego twierdzenia nie zachodzi. Oznaczałoby to, że dla każdego x $f(x) \neq f(-x)$.
Wprowadzimy pomocnicze przekształcenie g określone wzorem $g(x) = f(x) - f(-x)$. Z założenia uczynionego wyżej wynika, iż $g(x) \neq 0$ dla każdego x. Równocześnie przekształcenie g jest ciągłe i spełnia równość $g(-x) = -g(x)$.

Jeżeli teraz określimy równik naszej sfery jako krzywą $r(t) = (R\cos t,\ R\sin t,\ 0)$ (dla $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, R jest promieniem sfery) i złożymy przekształcenie $r:\langle 0, \pi\rangle \to S$ z $g: S \to C$, to otrzymamy krzywą $w(t)$ zamkniętą $\big($bo $r(0) = r(2\pi)\big)$, nie przechodzą przez 0 (bo $g(x) \neq 0$ dla każdego $x \in S$), i wreszcie taką, że $w(t+\pi) = g(R\cos(t+\pi),\ R\sin(t+\pi),\ 0) =$
$= g(-R\cos t, -R\sin t, 0) = g\big(-(R\cos t,\ R\sin t,\ 0)\big) = -g\big(r(t)\big) = -w(t)$.
Wobec tego $\operatorname{ind} w(t) = 2k+1 \neq 0$.
Ale $w(t)$ jest elementem ciągłej rodziny krzywych $w_\varrho(t)$ zdefiniowanych wzorem:

$$w_\varrho(t) = g(\sqrt{R^2-\varrho^2}\cos t,\quad \sqrt{R^2-\varrho^2}\sin t,\ \varrho)$$

$\big($jest tu oczywiście $w_0(t) = w(t)\big)$.
Warto przez chwilę zastanowić się nad geometryczną interpretacją rodziny $w_\varrho(t)$. Otóż krzywa $r_\varrho(t) = (\sqrt{R^2-\varrho^2}\cos t,\ \sqrt{R^2-\varrho^2}\sin t,\ \varrho)$ jest równoleżnikiem sfery leżącym na wysokości ϱ nad równikiem, a krzywa $w_\varrho(t)$ opisuje „zachowanie się" przekształcenia g na tym równoleżniku.
Pozostaje już teraz tylko zauważenie, że z jednej strony $\operatorname{ind} w_R(t) = \operatorname{ind} w_0(t) \neq 0$, z drugiej strony jednak „krzywa" $w_R(t) = g(0, 0, R)$ ma obraz złożony z jednego punktu i wobec tego $\operatorname{ind} w_R(t) = 0$. Tak więc z założenia, że dla każdej pary punktów antypodycznych $x,\ -x$ jest: $f(x) \neq f(-x)$, doszliśmy do sprzeczności — wykazując tym samym istnienie co najmniej jednej pary $(x,\ -x)$ takiej, że $f(x) = f(-x)$, czym zakończyliśmy dowód.
Powiedzmy na zakończenie słów parę o (trudnych już w dowodzie) uogólnieniach naszego twierdzenia. Jedno z nich, naturalne w świetle zadania będącego właściwie uproszczoną wersją twierdzenia o antypodach i naszego artykułu, brzmi tak:
Jeżeli S jest sferą w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej oraz f jest przekształceniem ciągłym S w przestrzeń n-1-wymiarową, to istnieje para punktów antypodycznych x i y takich, że $f(x) = f(y)$.
Bardziej nieoczekiwane jest twierdzenie, w którego założeniach znika symetria. Sformułujemy je w przypadku dwuwymiarowym.
Jeżeli $h: S \to S$ jest przekształceniem ciągłym sfery na siebie takim, że $h\big(h(x)\big) = x$ dla każdego $x \in S$ (przekształcenia takie nazywa się inwolucjami: symetria jest oczywiście inwolucją) *i f jest przekształceniem ciągłym sfery na płaszczyznę, to istnieje punkt x taki, że $f(x) = f\big(h(x)\big)$.*
Być może, ktoś z Czytelników spróbuje udowodnić takie twierdzenie o okręgu. Uprzedźmy jednak, że i w tym przypadku dowód jest dość trudny.

Zadania

Redaguje dr Andrzej Ziemiński

F23. Naczynie z wodą o temperaturze bliskiej 0°C zostało umieszczone pod kloszem pompy próżniowej o dużej wydajności pompowania. Opiszcie zjawiska jakie wystąpią po uruchomieniu pompy. Można przyjąć, że wszystkie procesy odbywają się bez wymiany ciepła z otoczeniem, tzn. adiabatycznie. Ciepło parowania wody w temperaturze 0°C wynosi $596\,\frac{\text{cal}}{\text{g}}$, ciepło krzepnięcia wody $79{,}8\,\frac{\text{cal}}{\text{g}}$, a ciepło sublimacji lodu $677\,\frac{\text{cal}}{\text{g}}$.
(Zadanie II-go stopnia XII Olimpiady Fizycznej — 1963 rok)
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje mgr Andrzej Mąkowski

M67. Łącząc środki sąsiednich boków pewnego czworokąta otrzymano czworokąt podobny do wyjściowego. Jaki to czworokąt?
Rozwiązanie na str. 14

M68. Przeciąć kwadrat na pięć części tak, by można z nich było ułożyć dwa kwadraty.
Rozwiązanie na str. 10

M69. Wykazać, że odległość dowolnego punktu ćwiartki okręgu od jego rzutu na jej cięciwę jest średnią geometryczną odległości tego punktu od jego rzutów prostokątnych na styczne do okręgu poprowadzone z końców rozważanej ćwiartki.
Rozwiązanie na str. 8