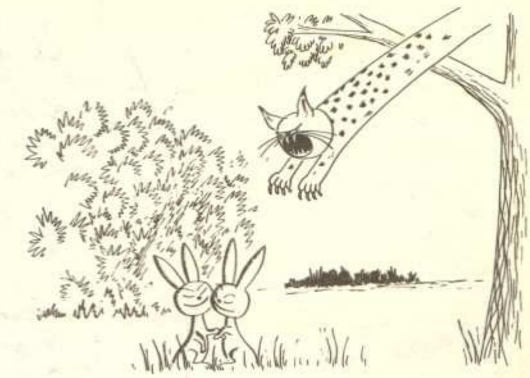
Rys. Z. Jujka



Rysie, króliki, wojownicze koty, czyli o modelowaniu matematycznym procesów niefizycznych

Dr hab. Ewa SKRZYPCZAK

Fizycy często posługują się równaniami matematycznymi, przy pomocy których zapisują treść praw fizycznych lub — skromniej — charakterystyki badanego procesu. Jeżeli interesuje nas dynamika, przebieg jakiegoś procesu, to zapis matematyczny ma zazwyczaj postać równania różniczkowego lub układu takich równań. Rozwiązaniem konkretnego zagadnienia jest wówczas wyznaczenie zależności czasowych dla zmiennych występujących w równaniach.

Rozwiązania układu równań może się podjąć oczywiście matematyk, ale **sformułowanie równań**, oparte o pewne znane lub założone związki charakteryzujące dane zjawisko, oraz **analiza fizycznego sensu rozwiązania** stanowią, z natury rzeczy, pole działania fizyka.

Przy opisie zachodzących w przyrodzie realnych procesów stosujemy z reguły pewne upraszczające założenia, idealizację, która stanowi warunek efektywnego sformułowania równań i ich rozwiązania. Ocena dopuszczalności stosowanych uproszczeń jest istotnym elementem pracy nad danym problemem. Ambitny program ,,maksymalistyczny", polegający na próbie uwzględnienia wszystkich możliwych efektów w badanych procesach, prowadzi nieuchronnie do układów równań trudnych lub zgoła niemożliwych do rozwiązania. Dlatego znajomość i ocena względnej roli (hierarchii) poszczególnych efektów jest podstawowym warunkiem skutecznej analizy problemu. Tę podstawową część zagadnienia bierze ,,na swoją odpowiedzialność" specjalista z danej dziedziny, w szczególności fizyk.

Fizycy przyzwyczaili się do takich zagadnień, z którymi przecież stykają się na codzień w swojej pracy. Prosty problem ruchu oscylatora harmonicznego, reprezentowanego np. przez ruch kulki zawieszonej na sprężynie, jest klasycznym przykładem takiego podejścia.

Prosty, przejrzysty zapis równania ruchu, oparty na prawie Hooke'a, jest wynikiem świadomego pomijania wielu efektów, np. tarcia, oporu ośrodka, zjawisk elektromagnetycznych (ruch przewodnika w polu magnetycznym Ziemi) itp.

Wobec takich nawyków i wprawy, jaką nabyli fizycy, nie powinien dziwić i naturalny wydaje się fakt, że np. w badaniu układów biologicznych czy socjologicznych z zawodowymi specjalistami w tych dziedzinach często współpracują fizycy. Dzieje się tak w szczególności w obszernej i intensywnie rozwijającej się dziedzinie matematycznego modelowania procesów.

Podamy poniżej dwa przykłady z dziedziny ekologii celem zilustrowania procedury konstruowania modelu i jego analizy.

I. Pierwszy przykład — to klasyczne zagadnienie ,,ofiary i drapieżnika", przy czym ,,ofiara" x (np. trawożerny królik albo żywiąca się planktonem ryba czy czerpiąca soki z ziemi roślina) ma pod dostatkiem pożywienia. Gdyby nie istniały ,,drapieżniki" y (np. mięsożerny ryś, żywiący się mniejszymi rybami szczupak czy niszczące rośliny owady), wówczas gatunek x rozwijałby się pomyślnie i nieograniczenie. Każde jednak spotkanie z przedstawicielem gatunku y prowadzi do zguby ,,ofiary" x. Gdyby nie istniały ,,ofiary" x, to gatunek y musiałby wymrzeć z braku pożywienia, i tylko spotkania z przedstawicielami gatunku x mogą stanowić podstawę rozwoju gatunku y, czerpiącego z tych spotkań pokarm.

Zadaniem naszym jest sformułowanie i analiza modelu matematycznego omawianych procesów. Jeżeli decydujemy się na pominięcie wpływów zewnętrznych (istnienie i rola innych gatunków, wpływ czynników atmosferycznych na ilość zapasów pożywienia gatunku x, migracje gatunków x i y (z — i na rozważany teren), to zmiany liczebności x i y w czasie przedstawiają równania:

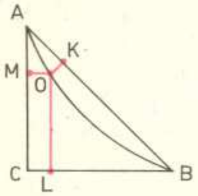
$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \tag{1a}$$

$$\frac{dy}{dt} = -by + \beta xy, \tag{1b}$$

$$a, b, \alpha, \beta > 0.$$

Rozwiązanie zadania M69.

Należy zastosować twierdzenie: kąt między styczną a cięciwą jest równy kątowi wpisanemu opartemu na łuku zamkniętym tą cięciwą.



Wowczas (patrz rysunek) $\sphericalangle OAK = \sphericalangle OBL$ i trójkąty prostokątne OAK i OBL są podobne. Stąd

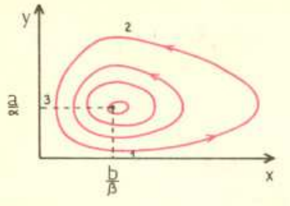
$$\frac{AO}{BO} = \frac{OK}{OL}.$$

Analogicznie (trójkąty OAM i OBK) otrzymujemy

$$\frac{AO}{BO} = \frac{OM}{OK},$$

i łącznie

$$\frac{OK}{OL} = \frac{OM}{OK}.$$

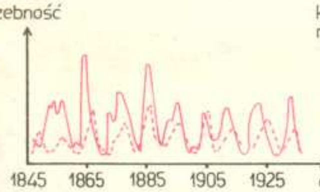


Rys. 1

Pierwsze człony po prawej stronie reprezentują „przyrost naturalny" — dominację narodzin nad śmiertelnością; w przypadku „drapieżnika" gatunek ten, pozostawiony sam sobie, wyginie z braku pożywienia — stąd minus przy współczynniku b. Drugie człony odpowiadają skutkom spotkań „drapieżników" i „ofiar", zgubnych dla „ofiary" (minus przy α!) i korzystnych dla „drapieżników" (plus przy β!).

Jakościowa teoria równań różniczkowych pozwala na podanie opisu ogólnych charakterystyk dynamiki układu w oparciu o związki (1), bez konieczności analitycznego rozwiązywania układu (1). Nie wchodząc w szczegóły takiego rozumowania zauważmy tylko, że wygodnie jest rozważać nasz problem na tzw. płaszczyźnie fazowej (xy), gdzie każdemu punktowi o współrzędnych x i y odpowiada określony stan układu, stan, w którym liczebności „ofiar" i „drapieżników" wynoszą odpowiednio x i y. Na płaszczyźnie fazowej w rozważanym przez nas zagadnieniu istnieją dwa punkty osobliwe, w których $dx/dt = 0 = dy/dt$: (A) $x = 0$, $y = 0$ i (B) $x = b/\beta$, $y = a/\alpha$. Punkt (A) nie jest interesujący (obydwa przedmioty naszego zainteresowania znikają!), natomiast punkt (B) jest punktem stacjonarnym, zwanym środkiem. Widzimy ponadto, że proste: $x = b/\beta$ (y dowolne, ale różne od a/α) i $y = a/\alpha$ (x różne od b/β) są miejscem geometrycznym stanów, w których zmienia się tylko liczebność x i y — odpowiednio. Trajektoriami układu dynamicznego o takich właściwościach są krzywe zamknięte, otaczające punkt osobliwy, przypominające swym kształtem w pobliżu punktu osobliwego elipsy, a coraz to bardziej zdeformowane w miarę oddalania się od tego punktu. Takie zamknięte trajektorie, zwane cyklami, stanowią graficzny obraz zachowania się układu (w naszym przypadku — zmiennych x i y) w czasie. Łatwo zauważyć (rys. 1), że przy ustalonych współczynnikach a, b, α, β liczebności każdego z gatunków ulegają periodycznym zmianom, przy czym ekstrema dla x i y są względem siebie przesunięte w fazie.

Ciekawym potwierdzeniem tego wniosku są dane pochodzące od traperów kanadyjskich, dostarczających skórki królików i rysi do punktów skupu (rys. 2).
Analiza naszego układu, przedstawionego na płaszczyźnie fazowej, pozwala na otrzymanie innych, napozór paradoksalnych wniosków. Okazuje się, że w celu zwiększenia liczebności królików (przynajmniej w pewnych momentach czasu) można albo odstrzeliwać rysie, albo je... importować z innych terenów (!), przy czym działalność pierwszą należy przeprowadzać w fazie (1) — na „dole" trajektorii, zaś działalność drugą w fazie (2) — na „górze" trajektorii. Możemy też — co na pierwszy rzut oka jest zupełnie nieoczekiwane — odstrzelić pewną liczbę królików, ale wówczas musimy to przeprowadzić koniecznie w fazie (3) — w lewym krańcu trajektorii. Każda z wymienionych procedur prowadzi do przejścia układu na trajektorię dalszą od punktu środkowego, co z kolei daje większą amplitudę zmian liczebności królików.



Rys. 2

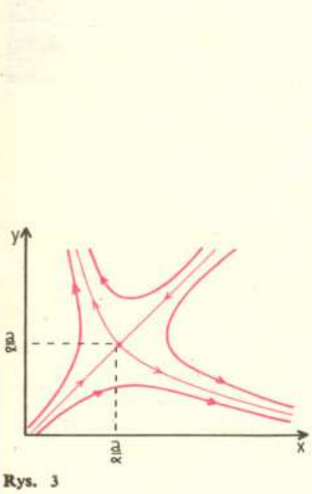
II. Omówimy teraz krótko zagadnienie dwóch gatunków **wzajemnie antagonistycznych**, tj. takich, że spotkanie przedstawicieli tych gatunków prowadzi do ich obopólnej zguby. Wyobraźmy sobie np. dwa gatunki kotów o różnej barwie sierści, ale poza tym identycznych, przy czym tak wojowniczych, że gdy tylko przedstawiciele jednego i drugiego gatunku spotkają się, walczą ze sobą tak zajadle, iż obydwaj giną. Zakładamy ponadto, że obydwa gatunki mają pod dostatkiem pożywienia, o które nie muszą walczyć.
Model matematyczny dla naszego problemu ma postać:

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy, \tag{2a}$$

$$\frac{dy}{dt} = ay - \alpha xy. \tag{2b}$$

Proponujemy Czytelnikowi podjęcie próby samodzielnej analizy modelu i wykreślenie trajektorii dla rozważanego układu na płaszczyźnie fazowej xy oraz sprawdzenie, czy przebieg ich jest jakościowo zgodny z przedstawionym schematycznie na rys. 3. Zauważmy, że po dostatecznie długim czasie wszystkie trajektorie oddalają się od początku układu współrzędnych, przy czym opisywany układ dąży do jednego z dwóch stanów stacjonarnych trwałych: $x \to \infty$, $y \to 0$, lub $x \to 0$, $y \to \infty$, czyli z biegiem czasu jeden gatunek musi nieuchronnie wyginąć, a drugi rozwija swą liczebność nieograniczenie. Innymi słowami niemożliwe jest na dłuższą metę współistnienie takich antagonistycznych gatunków!

Zauważmy dalej, że symetryczny stan $x = a/\alpha = y$ jest nietrwały — najmniejsza fluktuacja, dająca przewagę jednemu z gatunków determinuje dalszy bieg wypadków i stopniowe dążenie do odpowiedniego stanu trwałego (zanik jednego z gatunków i rozrost drugiego).
Ciekawe i warte podkreślenia jest powiązanie między **przypadkowym** charakterem początkowej fluktuacji a **deterministycznym** charakterem dalszego przebiegu trajektorii.
Opisany tu model, poza żartobliwym i niezbyt realnym przykładem z sytymi, ale wojowniczymi kotami, pozwala na analizę i opis pewnych zjawisk, związanych z ewolucją biologiczną, a mianowicie uniwersalnością kodu genetycznego, czy z problemem asymetrii optycznej, obserwowanej w optycznie czynnych cząsteczkach wchodzących w skład żywych organizmów. We współczesnej biofizyce teoretycznej rozważane są liczne modele matematyczne, przy czym udział takiego „fizycznego sposobu myślenia" (w konstruowaniu modelu i jego analizie) ma zasadnicze znaczenie.



Rys. 3