O metodzie Heaviside'a rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych ze stałymi współczynnikami

Dr Tadeusz IWANIEC

Z pojęciem równania różniczkowego mieli Czytelnicy okazję zetknąć się w artykule H. Kołakowskiego («Delta», 1974, 10; 1975, 6). Zajmiemy się pewną specjalną klasą równań i podamy ciekawą metodę ich rozwiązywania, pochodzącą od Heaviside'a.
Liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym n-tego rzędu ze stałymi współczynnikami nazywamy zależność postaci

$$u^{(n)}(t)+a_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ \dots\ +a_1u^{(1)}(t)+a_0u(t)=f(t), \tag{1}$$

w której $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ są danymi liczbami, $f(t)$ jest znaną funkcją, a $u(t)$ jest funkcją poszukiwaną. (Symbolem $u^{(k)}(t)$ $(k=1,2\dots n)$ oznaczyliśmy tutaj k-tą pochodną funkcji $u(t)$).
W praktyce okazuje się, że wygodniej jest rozpatrywać równania, w których współczynniki $a_0, a_1 \dots a_{n-1}$ są liczbami zespolonymi. W tej sytuacji znana funkcja $f(t)$ może również przyjmować wartości zespolone, a funkcję $u(t)$ znajdować będziemy w postaci zespolonej, to znaczy w postaci

$$u(t)=u_1(t)+iu_2(t),$$

gdzie $u_1(t)$ oraz $u_2(t)$ są niewiadomymi funkcjami rzeczywistymi; k-tą pochodną $u^{(k)}(t)$ funkcji zespolonej $u(t)$ rozumiemy jako funkcję daną wzorem

$$u^{(k)}(t)=u_1{}^{(k)}(t)+iu_2{}^{(k)}(t).$$

Takie ogólniejsze postawienie problemu jest konieczne, umożliwia ono bowiem stosowanie tej metody rozwiązywania, którą mam zamiar przedstawić. Z drugiej strony, jeśli dane równanie jest rzeczywiste i jeśli potrafimy znaleźć jego zespolone rozwiązanie $u(t)=u_1(t)+iu_2(t)$, to funkcja $u_1(t)$ jest jego rozwiązaniem rzeczywistym. Istotnie, jeśli bowiem

$$u^{(n)}(t)+a_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\ \dots\ +a_1u^{(1)}(t)+a_0u(t)=f(t),$$

to

$$u_1{}^{(n)}(t)+a_{n-1}u_1{}^{(n-1)}(t)+\ \dots\ +a_1u_1{}^{(1)}(t)+a_0u_1(t)+$$
$$i[u_2{}^{(n)}(t)+a_{n-1}u_2{}^{(n-1)}(t)+\ \dots\ +a_1u_2{}^{(1)}(t)+a_0u_2(t)]=f(t)+i\cdot 0.$$

Na mocy definicji równości liczb zespolonych (równe muszą być zarówno ich części rzeczywiste, jak i urojone):

$$u_1{}^{(n)}(t)+a_{n-1}u_1{}^{(n-1)}(t)+\ \dots\ +a_1u_1{}^{(1)}(t)+a_0u_1(t)=f(t)$$

i dodatkowo otrzymujemy

$$u_2{}^{(n)}(t)+a_{n-1}u_2{}^{(n-1)}(t)+\ \dots\ +a_1u_2{}^{(1)}(t)+a_0u_2(t)=0.$$

Oznaczmy symbolem $C^\infty(R)$ zbiór funkcji zespolonych określonych na prostej R i posiadających pochodne wszystkich rzędów. Na $C^\infty(R)$ określamy operator (przyporządkowanie)
$D: C^\infty(R)\to C^\infty(R)$, który każdej funkcji $u\in C^\infty(R)$ przypisuje jej pierwszą pochodną u'.
To znaczy: $Du=u'$ dla każdej funkcji z tego zbioru. Używając tych oznaczeń najprostsze równanie różniczkowe

$$u'(t)=f(t)$$

zapisujemy w postaci operatorowej

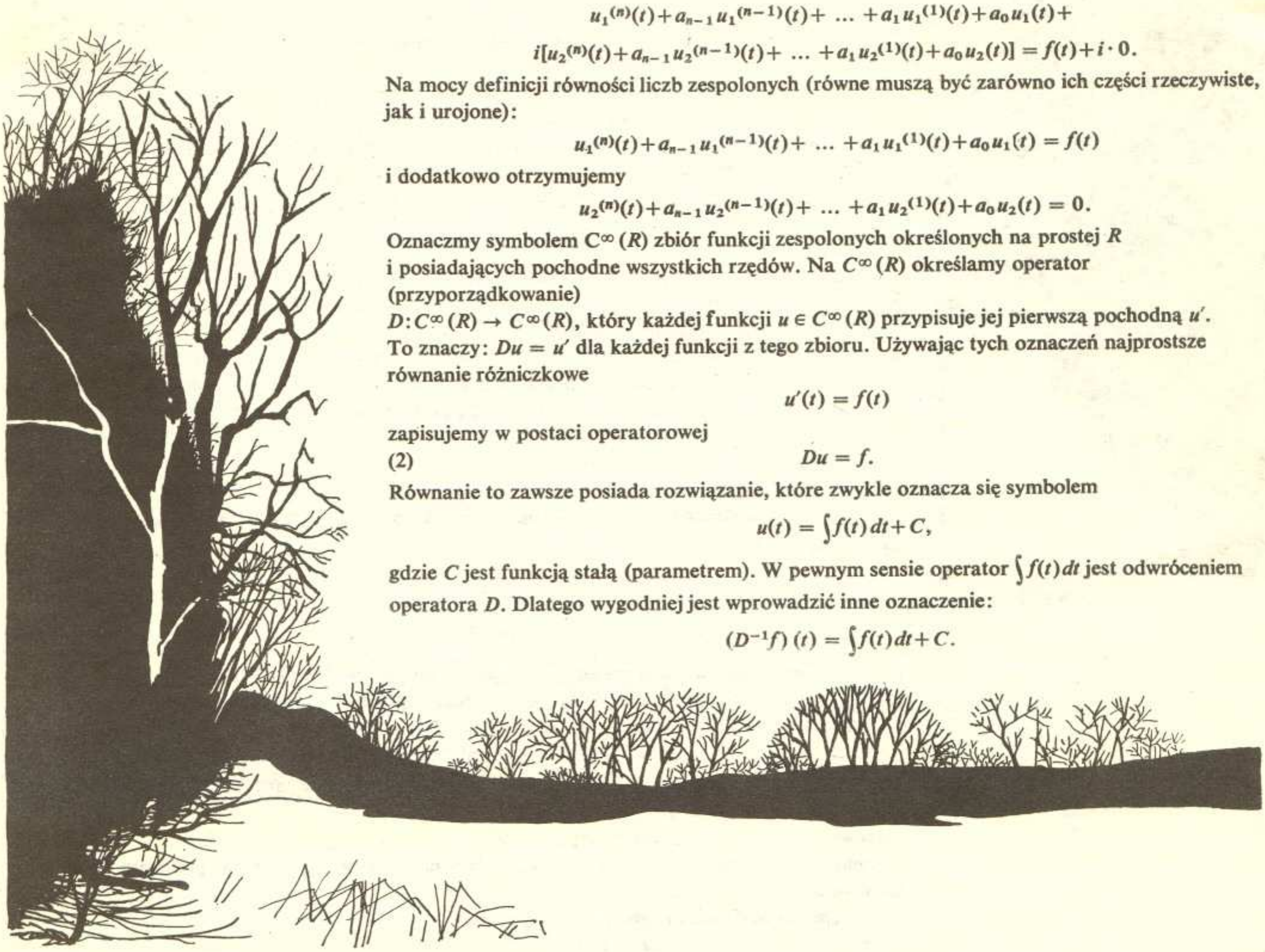
$$Du=f. \tag{2}$$

Równanie to zawsze posiada rozwiązanie, które zwykle oznacza się symbolem

$$u(t)=\int f(t)\,dt+C,$$

gdzie C jest funkcją stałą (parametrem). W pewnym sensie operator $\int f(t)\,dt$ jest odwróceniem operatora D. Dlatego wygodniej jest wprowadzić inne oznaczenie:

$$(D^{-1}f)(t)=\int f(t)\,dt+C.$$



W artykule „O przestrzeniach metrycznych (III)", wiersze 22-23 od góry, należy skreślić „(albo różnowartościową)" Jest to błąd nie pochodzący od Autorki, którą przepraszamy.

Zwróćmy uwagę, że operator D^{-1} odwzorowuje element $f \in C^\infty(R)$ w całą klasę funkcji $D^{-1}f \subset C^\infty(R)$, w której każde dwie różnią się o funkcję stałą. Tak więc rozwiązanie równania (2) sprowadza się do obliczenia całki. Z tego względu zazwyczaj zamiast mówić „rozwiązać równanie różniczkowe" mówimy (i to w przypadku każdego równania) „scałkować równanie różniczkowe". Czynność całkowania funkcji (czyli obliczanie $D^{-1}f$) nazywamy kwadraturą. Rozwiązać lub scałkować równanie różniczkowe oznacza wyrazić funkcję $u(t)$ przy pomocy skończonej liczby kwadratur znanej funkcji $f(t)$. W celu podania ogólnej metody całkowania równania (1) spróbujmy rozwiązać równanie postaci

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t),$$

gdzie λ jest daną liczbą zespoloną.
Zapisujemy je także w postaci operatorowej

$$(D-\lambda)u = f, \tag{3}$$

gdzie $D-\lambda$ jest operatorem działającym następująco:

$$(D-\lambda)u = Du - \lambda \cdot u.$$

Czytelnik może łatwo sprawdzić, że powstaje tu wzór

$$((D-\lambda)u)(t) = e^{\lambda t}D(e^{-\lambda t}u(t)),$$

więc równanie (3) zapisuje się w postaci

$$e^{\lambda t}De^{-\lambda t}u(t) = f(t).$$

Stąd otrzymujemy postać rozwiązania:

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} (D-\lambda)^{-1}f(t) = e^{\lambda t}D^{-1}e^{-\lambda t}f(t). \tag{4}$$

Podobnie, jak w przypadku równania (2), operator $(D-\lambda)^{-1}$ odwzorowuje każdy element $f \in C^\infty(R)$ w klasę funkcji $(D-\lambda)^{-1}f \subset C^\infty(R)$ i wyraża się za pomocą jednej kwadratury.
Przejdźmy teraz do możliwie najbardziej ogólnej sytuacji. Dowolnemu wielomianowi (λ — zmienna zespolona)

$$P_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

przyporządkowujemy w sposób wzajemnie jednoznaczny operator różniczkowy

$$P_n(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1D^1 + a_0D^0,$$

którego działanie na funkcjach $u \in C^\infty(R)$ określa formuła

$$(P_n(D)u)(t) = a_nu^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1u'(t) + a_0u(t).$$

Wielomian $P_n(\lambda)$, odpowiadający operatorowi $P_n(D)$, nazywamy symbolem operatora $P_n(D)$.
Sumę i iloczyn operatorów różniczkowych określamy następującymi wzorami:

$$\sum_{i=0}^{n} a_iD^i + \sum_{i=0}^{n} b_iD^i = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)D^i,$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_iD^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_jD^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_ib_jD^{i+j}.$$

Widzimy, że symbole sumy i iloczynu są równe odpowiednio sumie i iloczynowi symboli. Mówiąc mniej ściśle, skonstruowaliśmy działania na operatorach różniczkowych podobne do klasycznych działań na wielomianach. Umożliwia to przeniesienie wielu czynności wykonywanych na wielomianach do operatorów różniczkowych. Łatwo jest również sprawdzić, że iloczyn dwóch operatorów różniczkowych jest po prostu ich złożeniem.
W przyjętych oznaczeniach równanie (1) zapisujemy w postaci operatorowej

$$P_n(D)u = f. \tag{5}$$

Teraz przez analogię do równania (2) i (3) skonstruujemy wyrażający się przez skończoną liczbę kwadratur operator $P_n^{-1}(D)$, który przypisuje funkcjom $f \in C^\infty(R)$ klasę funkcji $P_n^{-1}(D)f \subset C^\infty(R)$ będących rozwiązaniem równania (5). W tym celu skorzystamy z podstawowego twierdzenia algebry, które mówi, że dowolny wielomian $P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ może być zapisany w postaci $P_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (\lambda-\lambda_m)^{\alpha_m}$ $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m = n)$, w której $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ są zespolonymi pierwiastkami wielomianu $P_n(\lambda)$, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ są ich krotnościami. W tym właśnie momencie widzimy, że dziedzina rzeczywista jest nienaturalna dla naszych badań. Nawet gdy równanie (1) byłoby rzeczywiste, to i tak mogłoby się zdarzyć, że liczby $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ byłyby zespolone i zmuszeni byli byśmy rozważać operatory zespolone. Równanie (5) jest teraz równoważne następującemu:

$$(D-\lambda_1)^{\alpha_1}(D-\lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(D-\lambda_m)^{\alpha_m}u = f.$$

Korzystając ze wzoru (4) uzyskujemy wzór wyrażający rozwiązanie równania (5) przez całki funkcji f:

$$u(t) = (D-\lambda_m)^{-\alpha_m}\ldots(D-\lambda_2)^{-\alpha_2}(D-\lambda_1)^{-\alpha_1}f(t) = \\ = e^{\lambda_m t}D^{-\alpha_m}e^{-\lambda_m t}\ldots e^{\lambda_1 t}D^{-\alpha_1}e^{-\lambda_1 t}f(t) \overset{\text{def}}{=} P_n^{-1}(D)f(t). \tag{6}$$

W ten sposób udowodniliśmy istnienie rozwiązania równania (1). Nietrudno zauważyć, że ogólne rozwiązanie, które jest określone wzorem (6), zależy od n parametrów. Każdy z nich pojawia się na skutek niejednoznaczności operatora D^{-1}, tj. jednej z kwadratur, których w iloczynie po prawej stronie wzoru (6) mamy dokładnie $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m = n$.
Przytoczone powyżej rozumowanie najlepiej zilustrować na przykładzie.
Zadanie. Podać wszystkie rozwiązania równania:

$$u'''(t) - 4u''(t) + 5u'(t) - 2u(t) \equiv 1. \tag{*}$$

Rozwiązanie
Wielomian $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ rozkładamy na czynniki

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)^2.$$

Następnie równanie zapisujemy w równoważnej formie operatorowej

$$(D-2)(D-1)^2 u \equiv 1.$$

Rozwiązanie otrzymujemy z formuły (6):

$$u(t) = e^t D^{-2} e^{-t} e^{2t} D^{-1} e^{-2t} = e^t D^{-2} e^t \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + C\right) = e^t D^{-1} D^{-1}\left(-\frac{1}{2}e^{-t} + Ce^t\right) = \\ = e^t D^{-1}\left(\frac{1}{2}e^{-t} + Ce^t + B\right) = e^t\left(-\frac{1}{2}e^{-t} + Ce^t + Bt + D\right) = -\frac{1}{2} + Ce^{2t} + (Bt+D)e^t.$$

Oczywiście, jeżeli dane jest jedno rozwiązanie równania (1), powiedzmy $u_0 \in P_n^{-1}(D)f$, to każde inne rozwiązanie różni się od u_0 o rozwiązanie równania jednorodnego (z prawą stroną równą zero), to znaczy o pewien element z klasy $P_n^{-1}(D)(0)$.
Klasę funkcji $P_n^{-1}(D)(0)$ można łatwo opisać. Czytelnicy znający elementy rachunku całkowego mogą udowodnić — używając kilkakrotnie wzoru na całkowanie przez części — że elementy klasy $P_n^{-1}(D)(0)$ są po prostu funkcjami postaci

$$w_{\alpha_1}(t)e^{\alpha_1 t} + w_{\alpha_2}(t)e^{\alpha_2 t} + \ldots + w_{\alpha_m}(t)e^{\alpha_m t},$$

gdzie $w_{\alpha_1}, \ldots, w_{\alpha_m}$ są dowolnymi wielomianami stopni mniejszych odpowiednio od $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.
Na przykładzie zadania 1 widzimy, że funkcja $u_0(t) \equiv -\frac{1}{2}$ jest szczególnym rozwiązaniem równania (*). Natomiast pozostała część rozwiązania, to znaczy funkcja

$$Ce^{2t} + (Bt+D)e^t,$$

jest rozwiązaniem równania jednorodnego. Wynik ten zgadza się z wypowiedzianym powyżej twierdzeniem.
Dla zapewnienia jednoznaczności rozwiązania należy podać oprócz równania (1) dodatkowe warunki na $u(t)$. Przykładem warunków, które zapewniają jednoznaczność, a jednocześnie istnienie rozwiązania, są tzw. warunki początkowe Cauchyego.
Problem Cauchyego. Znaleźć funkcję $u(t)$ spełniającą równanie (1) oraz następujące warunki początkowe:

$$u(0) = p_0,\ u'(0) = p_1,\ \ldots,\ u^{(n-1)}(0) = p_{n-1}.$$

Przez odpowiedni dobór parametrów występujących w ogólnym rozwiązaniu równania (1) możemy zawsze takie warunki spełnić, rozwiązując n-równań z n-niewiadomymi.
Dla przykładu: Rozwiązaniem równania (*) spełniającym warunki $u(0) = 1$, $u'(0) = 3$, $u''(0) = 5$ jest funkcja

$$u(t) = -\frac{1}{2} + (t+1)e^t + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

Rozwiązanie zadania M67.
Na mocy tw. Talesa boki „nowego" czworokąta są równoległe do przekątnych wyjściowego i, odpowiednio, o połowę krótsze od nich. „Nowy" czworokąt, jak i wyjściowy, są więc równoległobokami o kątach równych kątom między przekątnymi. Równoległoboki te mają wspólny środek. Można je więc przez obrót względem niego (lub być może przez symetrię względem prostej przez ten środek przechodzącej) ustawić tak, by miały boki i przekątne równoległe odpowiednio. Mamy zatem (patrz rysunek)
$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOK + \sphericalangle KOB = \sphericalangle BOL + \sphericalangle OBL = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BOC$,
czyli $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = 90°$.

Równoległoboki okazały się prostokątami o prostopadłych przekątnych, a więc kwadratami.