Metody Monte Carlo (III)

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

TROCHĘ TEORII [ciąg dalszy]

CENTRALNE TWIERDZENIE GRANICZNE, podobnie jak prawo wielkich liczb, podamy również bez dowodu. Dowód można znaleźć w licznych podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa, ostrzegamy jednak, że nie są to dowody bardzo łatwe.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ będzie ciągiem zmiennych losowych niezależnych, mających jednakowy rozkład, skończoną wartość oczekiwaną $EX_n = \mu$ oraz różną od zera wariancję $D^2X_n = \sigma^2$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right|}{\sigma}\sqrt{n}\leqslant x\right\}=\Theta(x), \tag{1}$$

gdzie $\Theta(x)$ jest funkcją określoną wzorem

$$\Theta(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

Kilka wartości $\Theta(x)$ podajemy w tabelce obok.

x	$\Theta(x)$
0	0
0,5	0,3829
1,0	0,6827
1,5	0,8664
2,0	0,9545
2,5	0,9876
3,0	0,9973

$\Theta(x)$	x
0,9	1,6449
0,95	1,9600
0,99	2,5758
0,999	3,2905

Pokażemy, jak korzysta się z tych twierdzeń, na przykładzie rozważanego poprzednio zadania Buffona. Przypomnijmy, że w zadaniu Buffona szacowaliśmy liczbę π rzucając igłę na odpowiednio poliniowany stół. Jeżeli igła miała długość l, odległość między liniami była równa L i prawdopodobieństwo, że rzucona na stół igła przetnie którąś z linii, było p, to $\pi = 2l/pL$ i zadanie sprowadzało się do szacowania prawdopodobieństwa p za pomocą częstości odpowiedniego zdarzenia w ciągu rzutów. Rozważmy zmienne losowe X_n, $n = 1, 2, \ldots$, zdefiniowane w następujący sposób:

$$X_n=\begin{cases}1, & \text{gdy w } n\text{-tym rzucie igła przetnie jedną z linii narysowanych na stole,}\\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

Mamy oczywiście $EX_n = p$, $D^2X_n = p(1-p)$, gdzie $p = 2l/\pi L$, więc wszystkie założenia centralnego twierdzenia granicznego są spełnione. Oszacowaniem p jest liczba $p_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Zajmiemy się dokładnością tego oszacowania, czyli wielkością $|p_n-p|$. Zauważmy przede wszystkim, że ponieważ p_n jest zmienną losową, to również $|p_n-p|$ jest zmienną losową i wobec tego opinia na temat dokładności rozwiązania będzie miała postać:

„*z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ różnica $|p_n-p|$ nie przekracza liczby ε*",

gdzie α i ε są odpowiednimi, zwykle małymi liczbami dodatnimi; małymi, gdyż chodzi o to, aby z dużym prawdopodobieństwem błąd rozwiązania był mały.
Przypuśćmy, że wykonaliśmy $n = 1000$ rzutów igłą Buffona o długości $l = 1$ na stół, na którym odległością między liniami jest $L = 2$. Przyjmijmy, że $1-\alpha = 0{,}99$ i obliczmy ε. Na mocy centralnego twierdzenia granicznego dla dużych n mamy w przybliżeniu

$$P\left\{\frac{|p_n-p|}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\leqslant x\right\}\approx\Theta(x). \tag{2}$$

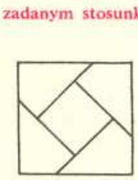
Dla $\Theta(x) = 1-\alpha = 0{,}99$ odczytujemy w tabelce wartość $x = 2{,}5758$ i otrzymujemy

$$\varepsilon = x\sqrt{p(1-p)/n}=\frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2l}{\pi L}\left(1-\frac{2l}{\pi L}\right)}.$$

Podstawiając podane wyżej wartości otrzymujemy

$$\varepsilon = 0{,}038.$$

Rozwiązanie zadania M68.
Można to zrobić jak na rysunku
Linie cięcia przechodzą przez środki boków danego kwadratu, zaś ich nachylenie jest dowolne — można otrzymać 2 kwadraty o dowolnie zadanym stosunku boków.



Możemy sformułować następujący wniosek: Jeżeli rzucimy 1000 razy igłą o długości $l = 1$ na stół Buffona z odległościami między liniami $L = 2$ i oszacujemy prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że igła przetnie którąś z linii za pomocą wielkości $p_{1000} = \frac{k}{1000}$, gdzie k jest liczbą zaobserwowanych przecięć, to z prawdopodobieństwem 0,99 błąd $|p_{1000}-p|$ nie przekroczy liczby 0,038.

Formułując powyższe zdanie należy mieć na uwadze fakt, że jest ono tylko w przybliżeniu prawdziwe, gdyż zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym $\Theta(x)$ jest wartością granicy odpowiedniego prawdopodobieństwa we wzorze (1), a nie wartością tego prawdopodobieństwa dla skończonych wartości n, jak w przybliżonym wzorze (2). Okazuje się jednak, że już dla n rzędu kilkudziesięciu otrzymuje się przybliżenie praktycznie zadowalające. Czytelnik zechce sam przeliczyć, jaki w powyższym przykładzie otrzymuje się błąd maksymalny oszacowania liczby π.

Spójrzmy jeszcze raz na (1) i przepiszmy ten wzór w postaci:

(3) $$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right| \leqslant x\sqrt{\frac{D^2X_i}{n}}\right\} \approx \Theta(x).$$

Widać, że dokładność oszacowania zależy tylko od liczby n eksperymentów i od wariancji D^2X_i zmiennych losowych X_i. Żeby więc wyznaczyć tę dokładność musimy znać, a przynajmniej umieć oszacować, wariancję D^2X_i. Zwykle jest to wielkość nieznana i szacuje się ją za pomocą tego samego eksperymentu statystycznego, który służy do oszacowania μ. Oznaczymy to oszacowanie przez S_n^2; wyraża się ono wzorem

(4) $$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2.$$

W praktycznych zastosowaniach metod Monte Carlo postępuje się zwykle w następujący sposób. Przyjmuje się, że $1-\alpha = 0{,}9545$, uważając taki poziom prawdopodobieństwa za wystarczająco duży. Dla $\Theta(x) = 0{,}9545$ otrzymuje się $x = 2$ (właśnie ta „okrągła" liczba 2 jest powodem zgody na takie nieco dziwne $1-\alpha$). Ze wzoru (3) odczytujemy wtedy, że

(5) „*z prawdopodobieństwem* 0,9545 *błąd oszacowania* μ *za pomocą* $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *nie przekroczy* $2\sqrt{D^2X_i/n}$".

Zastępując zwykle nieznaną wielkość D^2X_i jej oszacowaniem za pomocą S_n^2 otrzymujemy ostatecznie sformułowanie:

(6) „*z dużym prawdopodobieństwem* (*mniej więcej* 0,95) *błąd oszacowania* μ *za pomocą* μ_n *nie przekracza* $2S_n/\sqrt{n}$".

Zatem wielkość $2S_n/\sqrt{n}$ charakteryzuje błąd oszacowania metodą Monte Carlo. Podkreślamy, że tak określony błąd oszacowania jest wielkością losową i że należy pamiętać zawsze o wszystkich konsekwencjach tego faktu.

Rozpatrzmy na zakończenie jeszcze jeden przykład. W telewizyjnej pogadance o metodach Monte Carlo prof. Kazimierz Urbanik opowiadał o chłopcu, który mierzy pole powierzchni klombu w ogródku rzucając na chybił-trafił piłkę do tego ogródka. Klomb ma nieregularne kształty, a pole powierzchni ogródka jest znane i wynosi, powiedzmy, 500 m². Chłopiec rzucił piłką 100 razy, a 20 spośród tych rzutów zakończyło się upadkiem piłki na klomb. Jakie jest pole klombu? Z jaką dokładnością zostało ono oszacowane?

Niech $X_i = 1$, gdy w i-tym rzucie piłka upadnie na klomb, i $X_i = 0$ w przeciwnym przypadku. Mamy więc

$$p_{100} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i = 0{,}2,$$

gdzie p_{100} jest oszacowaniem prawdopodobieństwa zdarzenia, że piłka upadnie na klomb (ponownie odsyłamy Czytelnika do artykułu o prawdopodobieństwie geometrycznym).

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest więc gotowa: Pole klombu wynosi $0{,}2 \cdot 500\ \mathrm{m}^2 = 100\ \mathrm{m}^2$.

Żeby odpowiedzieć na drugie pytanie, wykonamy rachunki według wzoru (4). Otrzymamy $S_{100}^2 = 0{,}16$ i w konsekwencji, $2S_{100}/\sqrt{100} = 0{,}08$. Mnożąc ten wynik przez pole ogródka otrzymujemy $0{,}08 \cdot 500\ \mathrm{m}^2 = 40\ \mathrm{m}^2$.

Odpowiedź: Pole klombu wynosi $100 \pm 40\ \mathrm{m}^2$.

Czytelnik zechce odpowiedzieć na pytanie, ile razy chłopiec powinien rzucać piłkę, aby błąd oszacowania nie przekraczał 1 m².

W następnych odcinkach naszego artykułu o metodach Monte Carlo zajmiemy się poważniejszymi zastosowaniami tych metod.