Jeżeli $f(t)$ jest funkcją ciągłą, to z zacytowanego wyżej twierdzenia wynika, że istnieje ciąg funkcji $(f_n(t))_{n\in N}$ nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zbieżny niemal jednostajnie do $f(t)$. Funkcji $f(t)$ zatem przyporządkowujemy dystrybucję wyznaczoną przez ten ciąg, tzn. $\langle (f_n)_{n\in N}\rangle$. I znowu dowodzi się, że niezależnie od tego, jaki ciąg takich funkcji zbieżny niemal jednostajnie do $f(t)$ weźmiemy, zawsze będzie on wyznaczał tę samą dystrybucję. Dystrybucję tę będziemy oznaczać przez $\langle f\rangle$. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest k-krotnie różniczkowalna, to możemy napisać wzór

$$\langle f^{(k)}\rangle = D^k\langle f\rangle.$$

Oznacza to, że jeżeli weźmiemy dystrybucję wyznaczoną przez k-tą pochodną funkcji $f(t)$, otrzymamy to samo, co różniczkując k razy (w sensie dystrybucji) dystrybucję wyznaczoną przez $f(t)$. W związku z tym możemy uznać, że dla każdej funkcji ciągłej k-ta pochodna (dystrybucyjna) dystrybucji wyznaczonej przez tę funkcję jest, w pewnym sensie, ,,namiastką" jej k-tej pochodnej. Ponieważ dystrybucje można różniczkować dowolnie wiele razy, nasza teoria jest gotowa.

CZYM JEST NAPRAWDĘ DELTA DIRACA?

Jak już powiedzieliśmy, delta Diraca miała być namiastką drugiej pochodnej funkcji

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0, \\ t & \text{dla} \quad t > 0. \end{cases}$$

Jak zatem wygląda druga pochodna (w sensie dystrybucji) tej funkcji? Zgodnie z naszą teorią należy najpierw znaleźć ciąg $(h_n(t))_{n\in N}$ funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zbieżny niemal jednostajnie do $h(t)$. Takim ciągiem jest np.

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0, \\ te^{-\frac{1}{nt}} & \text{dla} \quad t > 0, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Wtedy na mocy przyjętych definicji drugą pochodną (dystrybucyjną) $h(t)$ jest dystrybucja $D^2\langle (h_n)_{n\in N}\rangle = \langle (h_n'')_{n\in N}\rangle$. Zgodnie z intencjami twórców teorii, dystrybucja ta miałaby odpowiadać ,,mitycznej" delcie Diraca.

PODSUMOWANIE, czyli WSZYSTKO DOBRE CO SIĘ DOBRZE KOŃCZY. Tak więc matematycy wywiązali się z postawionego przed nimi zadania i stworzyli teorię umożliwiającą różniczkowanie każdej funkcji ciągłej, w szczególności zaś nadanie delcie Diraca matematycznie poprawnego znaczenia. Po prostu nie jest ona funkcją (funkcja o takich własnościach nie istnieje), lecz jest dystrybucją.

Została jeszcze jedna rzecz do zrobienia. Należało zapytać najbardziej zainteresowanych, tzn. fizyków, czy teoria dystrybucji pasuje do ich rozważań. Okazało się, że tak, i to nawet bardzo dobrze. W ten sposób ,,honor" matematyki został ocalony, a fizycy mogli zrezygnować z rozważań o nie istniejących funkcjach i zastąpić je po prostu rozważaniami w ramach matematycznie poprawnej teorii.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej Mąkowski

M 64. Udowodnić, że dla liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$(x+y)^{x+y} > x^x \cdot y^y.$$

Rozwiązanie na str. 7 W. Mnich

M 65. Funkcją charakterystyczną zbioru A nazywamy taką funkcję f, że $f(x) = 1$ dla $x \in A$ i $f(x) = 0$ dla $x \notin A$. Dla jakich m prosta $x = m$ jest osią symetrii wykresu funkcji charakterystycznej zbioru liczb wymiernych W?

Rozwiązanie na str. 6 W. Mnich

M 66. Udowodnić, że liczba przedstawień liczby naturalnej n w postaci sumy k składników naturalnych (k — ustalona liczba naturalna) jest równa liczbie przedstawień liczby n w postaci sumy dowolnej liczby składników naturalnych, z których największy jest równy k (dwu przedstawień różniących się tylko porządkiem składników nie uważamy za różne).

Rozwiązanie na str. 12 W. Mnich

Redaguje dr Andrzej Ziemiński

F 22 Mamy do dyspozycji N jednakowych cegieł. Jak należy ułożyć cegły, jedna na drugiej, aby koniec ostatniej z nich wystawał jak najdalej w poziomie poza podstawę cegły znajdującej się na spodzie. Jednocześnie cała konstrukcja nie powinna runąć pod wpływem własnego ciężaru. Jaka będzie odległość w poziomie pomiędzy skrajnymi cegłami?

(Zadanie wydrukowane w Scientific American, listopad 1964, str. 128)

Rozwiązanie na str. 2