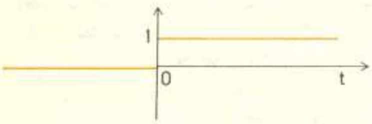
oradnik cudotwórcy, zyli różniczkowaniu unkcji nieróżniczkowalnych

Doc. dr Piotr MANKIEWICZ

Jednym z istotnych braków klasy funkcji ciągłych jest to, że nie wszystkie takie funkcje można różniczkować, a w szczególności różniczkować wielokrotnie. Przykłady funkcji ciągłych nigdzie nieróżniczkowalnych można np. znaleźć w artykule R. Sikorskiego *Zjazd SCFRZR* («Delta», 1974, nr 4). Z sytuacją taką matematycy, a także ci wszyscy, którzy używają aparatu matematycznego w innych dziedzinach życia, godzili się dość długo. Matematycy, ilekroć tylko zachodziła taka potrzeba, po prostu zakładali, że występujące w rozważaniach funkcje są różniczkowalne dostatecznie wiele razy, a funkcje pojawiające się w zastosowaniach matematyki były wystarczająco wiele razy różniczkowalne. Tak więc brak społecznego zapotrzebowania (tzn. zapotrzebowania ze strony pozamatematycznych dziedzin życia) i — co tu ukrywać — lenistwo umysłowe matematyków spowodowało, że cała ta sprawa utknęła w martwym punkcie. I wszyscy byli zadowoleni, aż tu nagle na scenę wkracza

FIZYKA KWANTOWA.

Świat kwantów jest, *ex definitione*, światem nieciągłym. Rozpatrzmy następujący przykład. Niech $H(t)$ będzie ilością energii wypromieniowanej przez cząsteczkę A do chwili t. Załóżmy, że w chwili $t_0 = 0$ cząsteczka A wypromieniowała 1 kwant energii. Oto wykres funkcji $H(t)$ (przy dodatkowym założeniu, że ilość energii wypromieniowanej do chwili $t_0 = 0$ wynosi 0).



Funkcja $H(t)$ nazywa się funkcją Heaviside'a.

Nie byłoby nic w tym złego, gdyby nie pewne przyzwyczajenie fizyków. Mianowicie, w wypadku kiedy jest mowa o przesyłaniu energii, mają oni zwyczaj mówić o natężeniu przesyłania energii (np. natężenie prądu elektrycznego). Wówczas, jeżeli $E(t)$ jest ilością energii przesłanej do chwili t, a $N(t)$ jest odpowiadającym $E(t)$ natężeniem w chwili t, to

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt.$$

Oznacza to, że ilość przesłanej energii od chwili t_1 do chwili t_2 jest całką z natężenia w okresie od t_1 do t_2. Jeżeli funkcja $E(t)$ jest różniczkowalna, to oczywiście $E'(t) = N(t)$.

Metodę na grunt teorii kwantów przeniósł P. Dirac. Nie troszcząc się o matematyczną poprawność, wprowadził do mechaniki kwantowej funkcję $\delta(t)$ opisującą natężenie przepływu energii dla $H(t)$. O funkcji $\delta(t)$ zakładał, że spełniona jest równość

$$H(t_2) - H(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t)dt$$

dla każdych t_1, t_2.

Posługując się „deltą Diraca" fizycy uzyskali wiele cennych wyników i stało się jasne, że funkcja ta jest bardzo wartościowym narzędziem w fizyce kwantowej. Wszystko byłoby bardzo proste, gdyby nie fakt, że bez specjalnego wysiłku można udowodnić, iż „delta Diraca" nie istnieje! Takiej funkcji po prostu nie ma. Fizycy konsekwentnie ignorowali ten fakt, nie interesuje ich bowiem matematyczna poprawność rozważań; najważniejsza jest dla nich „fizyczna" poprawność uzyskanych rezultatów. Z drugiej strony, matematycy nie mogli dopuścić by fizycy używali, z bardzo zresztą dobrym skutkiem, niedozwolonych matematycznych metod. Do nich zatem należało następne posunięcie.

CZEGO POTRZEBOWALI FIZYCY?

Już po pobieżnej analizie zagadnienia stawało się jasne, że tak naprawdę to w fizyce kwantowej potrzebna jest możliwość jakiegoś sensownego zróżniczkowania funkcji Heaviside'a. Od biedy można się zgodzić, że funkcja Heaviside'a jest pochodną funkcją ciągłej

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0, \\ t & \text{dla} \quad t > 0. \end{cases}$$

Tak więc cały problem sprowadza się do umożliwienia fizykom dwukrotnego zróżniczkowania tej funkcji (tzn. $h(t)$). Z drugiej strony, wydaje się rozsądnym przypuszczeniem, że jeżeli będzie można spełnić to żądanie, tj. podać rozsądną interpretację drugiej pochodnej funkcji $h(t)$, to najprawdopodobniej posługując się tą samą techniką, będzie można podać analogiczną interpretację k-tej pochodnej dowolnej funkcji ciągłej.

Sytuacja dojrzała więc do tego, by dać ogłoszenie następującej treści:

TEORIA MATEMATYCZNA w ramach której każda funkcja jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna – POTRZEBNA OD ZARAZ

To się nazywa zapotrzebowanie społeczne! Na takie ogłoszenie matematycy mogli odpowiedzieć tylko w jeden sposób. Mianowicie wziąć się do opracowywania takiej teorii. Ponieważ jednak trudno od razu powiedzieć, jak miałaby ona (tzn. teoria różniczkowania funkcji nieróżniczkowalnych) wyglądać, a konstruowanie takiej teorii metodą prób i błędów, nawet jeżeli daje się ona skonstruować, byłoby bardzo nieefektywne, warto się zastanowić, czy z problemami podobnego typu zetknęliśmy się uprzednio; a jeżeli tak to jak zostały one rozwiązane. W najogólniejszym sformułowaniu problem nasz wygląda następująco:

Rozwiązanie zadania M 65. Obrazem punktu (a,b) w symetrii względem prostej $x = m$ jest punkt $(2m-a, b)$. Jeżeli (a,b) należy do rozważanego wykresu funkcji, to 1°: $a \in W$ i $b = 1$ lub 2°: $a \notin W$ i $b = 0$. Niech $m \in W$. W przypadku 1° będzie $2m - a \in W$ i $b = 1$; w przypadku 2°: $2m-a$ $-a \in W$ i $b = 0$, a więc prosta $x = m$ dla $m \in W$ jest osią symetrii rozważanego wykresu. Niech teraz $m \in W$. Wówczas punkt $(0,1)$ należy do wykresu, zaś punkt $(2m-0,1)$ nie należy do wykresu. Prosta $x = m$ dla $m \in W$ nie jest więc osią symetrii rozważanego wykresu.

Rozwiązanie zadania M 64. Rozpatrujemy logarytmy przy dowolnej podstawie > 1, np. równej 10.

Mamy: $\log (x+y)^{x+y} = (x+y) \log (x+y) = x \log (x+y) + y \log (x+y) > x \log x + y \log y = \log x^x y^y$, a więc $(x+y)^{x+y} > x^x y^y$.

Uwaga. Dla x,y dodatnich zachodzi nierówność

$$(x+y)^{x+y} \leqslant (2x)^x (2y)^y.$$

Dany jest pewien zbiór (tu: funkcji ciągłych) i pewna operacja (tu: różniczkowanie), która jest czasami, ale nie zawsze, wykonalna na elementach tego zbioru. Jak w sposób sensowny postąpić, by nasza operacja była wykonywalna zawsze?

Teraz już widać, że z problemami tego typu zetknęliśmy się niejednokrotnie i, co ważniejsze, zostały one pomyślnie rozwiązane. Przykład — dzielenie liczb całkowitych. Operacja dzielenia jest nie zawsze wykonywalna w obrębie liczb całkowitych, a jednak daliśmy sobie z tym radę.

ZASADNICZA IDEA TEORII „NIEZAWODNEGO" DZIELENIA LICZB CAŁKOWITYCH

1. Skonstruowaliśmy pewien zbiór — zbiór liczb wymiernych. W zbiorze tym określiliśmy te same działania co na liczbach całkowitych, tak jednak, by dzielenie było zawsze wykonalne.

2. Następnie każdej liczbie całkowitej przyporządkowaliśmy odpowiednią liczbę wymierną (podaliśmy metodę interpretacji liczb całkowitych jako liczb wymiernych), tak aby wyprowadzić następujące

TWIERDZENIE. *Jeżeli jakieś działanie arytmetyczne jest wykonalne na pewnych liczbach całkowitych i jeżeli wynik tego działania zinterpretujemy jako liczbę wymierną, to otrzymamy dokładnie to samo, co w przypadku, gdy dane liczby całkowite najpierw zinterpretujemy jako liczby wymierne, a następnie wykonamy odpowiednie działania na tych liczbach wymiernych.*

3. Ostatecznie przyjęliśmy, że wynikiem dzielenia dwóch liczb całkowitych jest liczba wymierna będąca wynikiem dzielenia odpowiadających tym liczbom całkowitym liczb wymiernych.

Wszystko to wydaje się zbyt skomplikowane. W praktyce tak dalece oswoiliśmy się z takim właśnie podejściem, że nie rozróżniamy liczby całkowitej od odpowiadającej jej liczby wymiernej, i odwrotnie.

Oczywiście matematycy pracujący nad teorią różniczkowania dowolnej funkcji ciągłej zauważyli opisane wyżej analogie i po pewnym czasie przedstawili kilka wersji takiej teorii. Teorię tę nazwali „teorią dystrybucji". Niżej opisana jest jedna z najbardziej elementarnych jej wersji pochodząca od J. Mikusińskiego i R. Sikorskiego. Należy podkreślić, że podstawowa idea teorii dystrybucji pokrywa się w zasadzie z przedstawioną wyżej podstawową ideą teorii liczb wymiernych.

TEORIA DYSTRYBUCJI. INTUICJE.

Dla uproszczenia zakładamy, że wszystkie występujące w naszych rozważaniach funkcje są określone i ciągłe na całej prostej rzeczywistej.

Na początku musimy zdefiniować zbiór nazywany „zbiorem dystrybucji" oraz zawsze wykonalną w tym zbiorze operację różniczkowania (por. punkt 1 wyżej), z tym że to wszystko ma być w zgodzie ze zdrowym rozsądkiem „matematycznym". Punktem wyjścia naszej konstrukcji będzie

TWIERDZENIE. *Dla każdej funkcji ciągłej $f(t)$ istnieje ciąg $(f_n(t))_{n \in N}$ funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zbieżny do niej niemal jednostajnie.*

Mówimy, że ciąg $(f_n(t)_{n \in N})$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $f(t)$, jeśli dla każdego przedziału domkniętego $\langle -M, M \rangle$ i każdej liczby dodatniej ε istnieje taka liczba N, że $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ dla wszystkich $n \in N$ i wszystkich $t \in \langle -M, M \rangle$.

Ustalmy teraz funkcję $f(t)$ i niech $(f_n(t))_{n \in N}$ będzie ciągiem funkcji, o jakim mowa w twierdzeniu. Jeżeli przyjmiemy, że ciąg $(f_n(t))_{n \in N}$ odpowiada w pewnym sensie funkcji f, to wypada też zgodzić się z tym, iż ciąg $(f_n^{(k)}(t))_{n \in N}$, złożony z k-tych pochodnych wyjściowego ciągu, odpowiada k-tej pochodnej funkcji $f(t)$. Z drugiej strony daną funkcję $f(t)$ można przedstawić jako niemal jednostajną granicę różnych ciągów funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych. Zauważmy, że z podobną sytuacją zetknęliśmy się w przypadku liczb wymiernych; liczbę całkowitą 1 można przedstawić za pomocą różnych ułamków np. 1/1, 2/2, 3/3, itp. Trudność tę ominęliśmy definiując liczbę wymierną jako klasę wszystkich możliwych jej przedstawień za pomocą ułamków.

Wszystko to prowadzi do następujących ustaleń:

TEORIA DYSTRYBUCJI. KONSTRUKCJA.

Przez A oznaczmy zbiór złożony z wszystkich ciągów $(f_n(t))_{n \in N}$ funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych, spełniających warunek: istnieje ciąg funkcji $(F_n(t))_{n \in N}$ zbieżny niemal jednostajnie do pewnej funkcji $F(t)$ oraz istnieje liczba całkowita nieujemna k taka, że $F_n^{(k)}(t) = f_n(t)$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Dystrybucją wyznaczoną przez ciąg $(f_n(t))_{n \in N} \in A$ będziemy nazywali klasę tych wszystkich ciągów $(g_n(t))_{n \in N} \in A$, które spełniają warunek: istnieją ciągi $(F_n(t))_{n \in N}$ i $(G_n(t))_{n \in N}$ funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych i nieujemna liczba całkowita k takie, że

(*i*) ciągi $(F_n(t))_{n \in N}$ i $(G(t))_{n \in N}$ zbiegają się niemal jednostajnie do tej samej funkcji ciągłej,

(*ii*) $\qquad F_n^{(k)}(t) = f_n(t)$ i $G_n^{(k)}(t) = g_n(t)$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Dystrybucję wyznaczoną przez ciąg $(f_n(t))_{n \in N}$ będziemy oznaczać przez $\langle (f_n)_{n \in N} \rangle$. Bez specjalnego trudu można udowodnić, że w ten sposób rozbiliśmy zbiór A na rodzinę podzbiorów rozłącznych nazywanych dystrybucjami.

Należy jeszcze zdefiniować operację różniczkowania dystrybucji. Reguła różniczkowania dystrybucji jest prosta i naturalna. Mianowicie pochodną dystrybucji wyznaczonej przez ciąg $(f_n(t))_{n \in N}$ jest dystrybucja wyznaczona przez ciąg $(f_n'(t))_{n \in N}$. Operację różniczkowania dystrybucji będziemy oznaczać przez D (operację k-krotnego różniczkowania — przez D^k). Łatwo można udowodnić, że jeżeli ta sama dystrybucja jest wyznaczona przez dwa różne ciągi, to wynik różniczkowania dystrybucji nie zależy od tego, który ciąg będziemy różniczkować. W ten sposób mamy już za sobą najtrudniejszą część teorii (odpowiadającą punktowi 1 dzielenia liczb całkowitych).

Następnie każdej funkcji ciągłej należy przyporządkować dystrybucję. Robimy to w taki sposób:

Jeżeli $f(t)$ jest funkcją ciągłą, to z zacytowanego wyżej twierdzenia wynika, że istnieje ciąg funkcji $(f_n(t))_{n \in N}$ nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zbieżny niemal jednostajnie do $f(t)$. Funkcji $f(t)$ zatem przyporządkowujemy dystrybucję wyznaczoną przez ten ciąg, tzn. $\langle (f_n)_{n \in N} \rangle$. I znowu dowodzi się, że niezależnie od tego, jaki ciąg takich funkcji zbieżny niemal jednostajnie do $f(t)$ weźmiemy, zawsze będzie on wyznaczał tę samą dystrybucję. Dystrybucję tę będziemy oznaczać przez $\langle f \rangle$. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest k-krotnie różniczkowalna, to możemy napisać wzór

$$\langle f^{(k)} \rangle = D^k \langle f \rangle.$$

Oznacza to, że jeżeli weźmiemy dystrybucję wyznaczoną przez k-tą pochodną funkcji $f(t)$, otrzymamy to samo, co różniczkując k razy (w sensie dystrybucji) dystrybucję wyznaczoną przez $f(t)$. W związku z tym możemy uznać, że dla każdej funkcji ciągłej k-ta pochodna (dystrybucyjna) dystrybucji wyznaczonej przez tę funkcję jest, w pewnym sensie, „namiastką" jej k-tej pochodnej. Ponieważ dystrybucje można różniczkować dowolnie wiele razy, nasza teoria jest gotowa.

CZYM JEST NAPRAWDĘ DELTA DIRACA?

Jak już powiedzieliśmy, delta Diraca miała być namiastką drugiej pochodnej funkcji

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leq 0, \\ t & \text{dla} \quad t > 0. \end{cases}$$

Jak zatem wygląda druga pochodna (w sensie dystrybucji) tej funkcji? Zgodnie z naszą teorią należy najpierw znaleźć ciąg $(h_n(t))_{n \in N}$ funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych zbieżny niemal jednostajnie do $h(t)$. Takim ciągiem jest np.

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leq 0, \\ t e^{-\frac{1}{nt}} & \text{dla} \quad t > 0, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Wtedy na mocy przyjętych definicji drugą pochodną (dystrybucyjną) $h(t)$ jest dystrybucja $D^2 \langle (h_n)_{n \in N} \rangle = \langle (h_n'')_{n \in N} \rangle$. Zgodnie z intencjami twórców teorii, dystrybucja ta miałaby odpowiadać „mitycznej" delcie Diraca.

PODSUMOWANIE, czyli WSZYSTKO DOBRE CO SIĘ DOBRZE KOŃCZY. Tak więc matematycy wywiązali się z postawionego przed nimi zadania i stworzyli teorię umożliwiającą różniczkowanie każdej funkcji ciągłej, w szczególności zaś nadanie delcie Diraca matematycznie poprawnego znaczenia. Po prostu nie jest ona funkcją (funkcja o takich własnościach nie istnieje), lecz jest dystrybucją.

Została jeszcze jedna rzecz do zrobienia. Należało zapytać najbardziej zainteresowanych, tzn. fizyków, czy teoria dystrybucji pasuje do ich rozważań. Okazało się, że tak, i to nawet bardzo dobrze. W ten sposób „honor" matematyki został ocalony, a fizycy mogli zrezygnować z rozważań o nie istniejących funkcjach i zastąpić je po prostu rozważaniami w ramach matematycznie poprawnej teorii.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej Mąkowski

M 64. Udowodnić, że dla liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$(x+y)^{x+y} > x^x \cdot y^y.$$

Rozwiązanie na str. 7 W. Mnich

M 65. Funkcją charakterystyczną zbioru A nazywamy taką funkcję f, że $f(x) = 1$ dla $x \in A$ i $f(x) = 0$ dla $x \notin A$. Dla jakich m prosta $x = m$ jest osią symetrii wykresu funkcji charakterystycznej zbioru liczb wymiernych W?

Rozwiązanie na str. 6 W. Mnich

M 66. Udowodnić, że liczba przedstawień liczby naturalnej n w postaci sumy k składników naturalnych (k — ustalona liczba naturalna) jest równa liczbie przedstawień liczby n w postaci sumy dowolnej liczby składników naturalnych, z których największy jest równy k (dwu przedstawień różniących się tylko porządkiem składników nie uważamy za różne).

Rozwiązanie na str. 12 W. Mnich

Redaguje dr Andrzej Ziemiński

F 22 Mamy do dyspozycji N jednakowych cegieł. Jak należy ułożyć cegły, jedna na drugiej, aby koniec ostatniej z nich wystawał jak najdalej w poziomie poza podstawę cegły znajdującej się na spodzie. Jednocześnie cała konstrukcja nie powinna runąć pod wpływem własnego ciężaru. Jaka będzie odległość w poziomie pomiędzy skrajnymi cegłami?

(Zadanie wydrukowane w Scientific American, listopad 1964, str. 128)

Rozwiązanie na str. 2