Metody Monte Carlo (II)

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

TROCHĘ TEORII

U podstaw metod Monte Carlo leżą dwa następujące twierdzenia: *prawo wielkich liczb* i *centralne twierdzenie graniczne*. Pewne elementy tych twierdzeń podane są w podręczniku rachunku prawdopodobieństwa dla szkół średnich (W. Szlenka) oraz w artykułach W. Szlenka w «Delcie» (1974, nr 11 i 1975, nr. 2).

Mówiąc o metodach Monte Carlo musimy zatrzymać się chwilę przy tych twierdzeniach. Pierwsze z nich rozstrzyga o tym, że uzyskany przez nas ciąg kolejnych przybliżeń szacowanej wielkości (np. liczby π w zadaniu Buffona z poprzedniego odcinka naszego serialu) jest zbieżny do poszukiwanego przez nas rozwiązania. Drugie twierdzenie umożliwia udzielenie odpowiedzi na pytanie, jak daleko jesteśmy od rozwiązania, gdy wykonaliśmy już określoną, dostatecznie dużą liczbę eksperymentów.

Oba twierdzenia są bardzo ważnymi twierdzeniami w rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej, tak że bez przesady można powiedzieć, iż większość rezultatów tych teorii jest konsekwencją właśnie tych dwóch podstawowych twierdzeń. Prawo wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne to w istocie rzeczy cały zbiór różnych twierdzeń; ograniczymy się tu do podania tylko najprostszych wersji, przy czym — ze względu na interesujące nas zastosowania w metodach Monte Carlo — większy nacisk położymy na ich interpretacje niż na ich formalizm matematyczny.

PRAWO WIELKICH LICZB sformułujemy najpierw w jego najprostszej postaci jako tzw. prawo wielkich liczb Bernoulliego, ale podamy je w tzw. mocnej wersji. Rozpoczniemy od kilku uwag na temat pewnych prawdopodobieństw geometrycznych. Przypominamy (por. «Delta» 1975, nr 6), że jeżeli Ω jest kwadratem jednostkowym i $\mathfrak{A}$ rodziną takich podzbiorów zbioru Ω, które mają pole, to prawdopodobieństwo $P(A)$ zbioru $A \in \mathfrak{A}$ jest równe polu tego zbioru. Usuńmy teraz pewien punkt x z rozważanego kwadratu. Oczywiście pole zbioru $\Omega - \{x\}$ jest nadal równe jedności, a więc również $P(\Omega - \{x\}) = 1$. Więcej nawet: okazuje się, że jeżeli z Ω usuniemy przeliczalną liczbę punktów $x_1, x_2, \ldots$, to prawdopodobieństwo pozostałego zbioru jest równe 1:

$$P(\Omega - \{x_1, x_2, \ldots\}) = 1.$$

Czytelnik, który dobrze rozumie mierzenie pól (długości, objętości itp.), nie widzi w tym nic zaskakującego. Nieco natomiast zaskakująca może być interpretacja z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa. Usuńmy mianowicie z kwadratu Ω wszystkie punkty, których obie współrzędne są liczbami wymiernymi (a więc przeliczalną liczbę punktów), i oznaczmy przez Ω_{niewym} pozostałą część zbioru Ω. Zbiór Ω staje się w ten sposób kwadratem—,,sitem", w którym jest nieskończenie wiele ,,dziur". Rzućmy losowo punkt na zbiór Ω. Prawdopodobieństwo, że wpadnie on do zbioru Ω_{niewym} (a więc, że nie przeleci on przez to sito) jest równe jedności, chociaż zdarzenie polegające na zatrzymaniu się punktu na sicie nie jest wcale zdarzeniem pewnym. Skonstruowaliśmy w ten sposób zdarzenie, które nie jest identyczne ze zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych, ale którego prawdopodobieństwo jest równe jedności.

Po tych uwagach możemy przystąpić do sformułowania zapowiedzianego mocnego prawa wielkich liczb Bernoulliego:

Niech s_n będzie liczbą sukcesów w n pierwszych próbach nieskończonego ciągu prób Bernoulliego, z których każda z prawdopodobieństwem p kończy się sukcesem. Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego

$$\frac{s_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} p$$

jest równe jedności.

Czytelnik, który dobrze przemyślał uwagi o prawdopodobieństwie geometrycznym, poprzedzające sformułowanie tego twierdzenia, z łatwością zrozumie następującą interpretację tego wyniku: jeżeli będziemy realizowali nieskończony ciąg prób Bernoulliego, to być może obserwowana przez nas częstość s_n/n sukcesów nie będzie zbieżna do prawdopodobieństwa p sukcesu, ale liczba takich zdarzeń jest tak znikoma w porównaniu z liczbą wszystkich możliwych zdarzeń, że taka sytuacja może zaistnieć tylko z prawdopodobieństwem równym zeru.

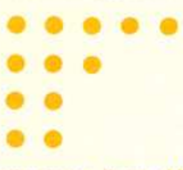
Matematycy używają w tym wypadku następującej terminologii: ,,*w prawie każdym* ciągu prób Bernoulliego częstość s_n/n dąży do p" albo ,,ciąg s_n/n *prawie na pewno* dąży do p", przy czym w obu ostatnich zdaniach mowa jest o tak zwanej zwykłej zbieżności, dobrze znanej w elementarnej matematyce (dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że dla każdego $n > N$ mamy $|s_n/n - p| < \varepsilon$).

W metodach Monte Carlo (i w innych zastosowaniach teorii prawdopodobieństwa) korzysta się najczęściej z trochę ogólniejszej postaci tego prawa. Zauważmy mianowicie, że w wielu sytuacjach wynik eksperymentu to nie tylko jedno z dwóch możliwych zdarzeń, jak w rzucie monetą lub rzucie igłą Buffona. Już przy rzucie kostką możemy otrzymać jedną z sześciu kolejnych liczb naturalnych, a ogólnie wygodnie jest opisywać wynik eksperymentu za pomocą odpowiedniej zmiennej losowej. Wtedy ciąg eksperymentów prowadzi do ciągu $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ zmiennych losowych. Mocne prawo wielkich liczb w tym przypadku brzmi: *jeżeli wszystkie zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ są niezależne, mają taki sam rozkład i wartość oczekiwaną równą μ, to z prawdopodobieństwem równym jedności*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mu.$$

Nasze nadzieje na to, że szacując interesujące nas wielkości za pomocą serii eksperymentów statystycznych otrzymujemy to, o co nam chodzi, uzasadnione są właśnie tym twierdzeniem.

Rozwiązanie zadania M 66. Każdemu przedstawieniu liczby naturalnej w postaci $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ przyporządkujemy pewien układ punktów, np. przedstawieniu $12 = 5 + 3 + 2 + 2$ przyporządkujemy układ



(Układ ma tyle wierszy, ile jest składników, w każdym wierszu liczba punktów równa jest kolejnemu składnikowi; możemy oczywiście przyjąć, że składniki są ustawione w porządku nierosnącym).

Zastosowanie takich układów punktów daje natychmiastowy dowód tezy zadania, mianowicie ,,odczytujemy" taki układ kolumnami. Z rysunku otrzymujemy więc rozkład

$$12 = 4 + 4 + 2 + 1 + 1,$$

w którym największy składnik równy jest 4. Każdemu rozkładowi na k składników jest więc w sposób wzajemnie jednoznaczny przyporządkowany rozkład na składniki, z których największy jest równy k.