mała delta

Czy wierzyć intuicji?

Intuicja, czyli wyczucie, jest nieocenionym sprzymierzeńcem matematyka. Dobra intuicja pozwala szybko przewidzieć wynik i uniknąć długich rozważań. Na przykład gdy wiemy, że dwa boki trójkąta są równe, to intuicja podpowiada nam, iż kąty leżące naprzeciwko tych boków też są równe. Ścisłe rozumowanie potwierdza, że w tym przypadku intuicja nas nie zawiodła. A jednak nie zawsze intuicji można wierzyć. Niekiedy może nas ona zawieść, i to jak bardzo! Przykładem i przestrogą niech będą następujące dwa zadania.

Bibułkę o grubości $\frac{1}{16}$ mm, np. papierową serwetkę, składamy tak, jakbyśmy ją chcieli schować do małej kieszonki: na pół, znów na pół, jeszcze raz na pół i tak dalej.

Przypuśćmy, że bibułkę tę złożyliśmy „w myśli" (bo praktycznie się nie da — spróbujcie) 50 razy. Jaka będzie grubość złożonej tak 50 razy bibułki?

Rozwiązanie

Ci, którzy nie znają tego zadania, uważają na ogół, że bibułka będzie miała grubość najwyżej kilku metrów. Tymczasem grubość złożonej 50 razy bibułki będzie zaskakująco duża, przekroczy bowiem 64 000 000 km (64 miliony kilometrów!).

Rachunek jest prosty. Skorzystajmy tylko z pewnych przybliżeń. Zauważmy, że gdy bibułkę złożymy raz, to jej grubość się podwoi i będzie równa

$$\frac{1}{16}\,\text{mm}\cdot 2.$$

Gdy złożymy drugi raz, podwoi się grubość uzyskana za pierwszym złożeniem. Grubość bibułki złożonej dwa razy będzie równa

$$\frac{1}{16}\,\text{mm}\cdot 2\cdot 2.$$

Gdy złożymy po raz trzeci, podwoimy poprzednią grubość. Bibułka złożona trzykrotnie będzie miała grubość równą

$$\frac{1}{16}\,\text{mm}\cdot 2\cdot 2\cdot 2.$$

Stąd wniosek: gdy bibułkę złożymy 50 razy, jej grubość będzie równa

$$\frac{1}{16}\,\text{mm}\cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\ldots\cdot 2}_{\text{(50 dwójek)}}.$$

Czy to dużo?

$$\frac{1}{16}\,\text{mm}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{(50 dwójek)}} = \frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{\text{(4 dwójki)}}}\,\text{mm}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{(50 dwójek)}} = \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{(46 dwójek)}}\,\text{mm}.$$

Dlaczego?

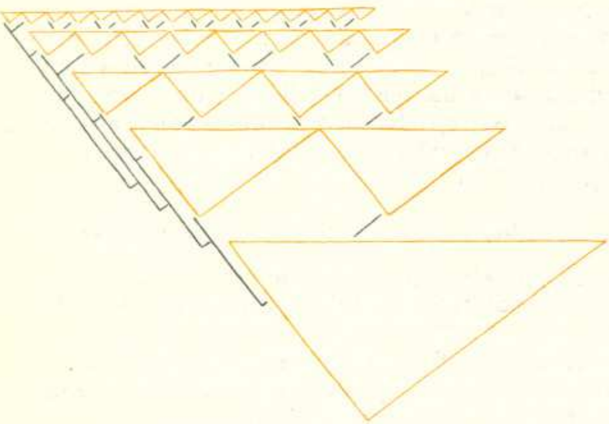
Zadajmy sobie trud i policzmy dalej: $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{\text{(10 dwójek)}} = 1024.$ Sprawdźcie!

A więc $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{(46 dwójek)}}\,\text{mm} =$

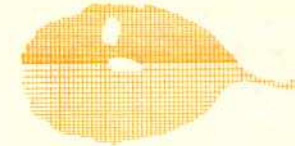
$$= \underbrace{(2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2)}_{\text{(10 dwójek)}}\underbrace{(2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2)}_{\text{(10 dwójek}}\underbrace{(2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2)}_{\text{(10 dwójek)}}\underbrace{(2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2)}_{\text{(10 dwójek)}}\underbrace{(2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2)}_{\text{(6 dwójek)}}\,\text{mm} = 1024\cdot 1024\cdot 1024\cdot 1024\cdot 64\,\text{mm}.$$

Jest to więcej niż $1000\cdot 1000\cdot 1000\cdot 1000\cdot 64\,\text{mm} = 64\cdot 1000\cdot 1000\cdot 1000\,\text{m} = 64\cdot 1000\cdot 1000\,\text{km} = 64\,000\,000\,\text{km}$.

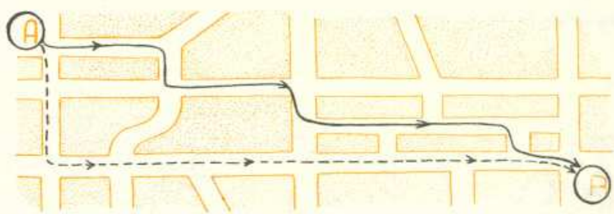
Niebywałe!
Tym, którzy lubią liczyć, proponujemy następujące obliczenia:
Przyjmując, że odległość Ziemi od Księżyca jest równa 400 000 km (w rzeczywistości jest ona mniejsza) obliczcie, ile razy większa od tej odległości jest grubość naszej 50-krotnie złożonej bibułki.



Niech te dwa zadania będą przestrogą dla tych, którzy chcieliby ufać intuicji bez zastrzeżeń.
A na zakończenie rozwiążcie takie zadanie:
Bolek i Lolek ścigają się na rowerach po ulicach miasta (plan ulic pokazujemy obok). Start wyścigu znajduje się w miejscu oznaczonym na planie literą A, meta w miejscu oznaczonym literą B. Bolek wybrał trasę oznaczoną na planie linią ciągłą, natomiast Lolek trasę oznaczoną linią przerywaną. Który z nich wybrał lepszą drogę?



Mamy trójkąt o bokach 3, 4, 5. Przy najdłuższym boku tego trójkąta prowadzimy ząbkowaną łamaną o liniach równoległych do pozostałych boków trójkąta (rysunki pokazują, jak może wyglądać taka łamana).
Jaka będzie długość linii ząbkowanej, której ząbki są bardzo małe, np. odległe wierzchołkami od podstawy trójkąta o 1/1000? Taka linia ząbkowana będzie się, praktycznie biorąc, prawie pokrywała z podstawą trójkąta, a więc wydaje się, że jej długość nie powinna być wiele większa niż 5.
Tymczasem okazuje się, że długość każdej takiej linii ząbkowanej nie zależy od wielkości i liczby ząbków i jest zawsze równa 7. Aby się o tym przekonać, zrzutujmy lewe krawędzie ząbków prostopadle na bok długości 3 i zauważmy, że ich łączna długość jest równa długości tego boku.
Podobnie, łączna długość prawych krawędzi ząbków jest równa 4. Razem 7.



Atomy trzęsą się z... ciepła

— Przypomnij sobie doświadczenie z kroplą atramentu w wodzie. Doświadczenie to wykazało, że ruchliwość atomów i cząsteczek zależy od temperatury. Im wyższa temperatura ciała, tym szybciej poruszają się cząsteczki. W ciele stałym cząsteczki rozmieszczone są blisko jedna obok drugiej. Nie mogą poruszać się swobodnie, jak w gazie, lecz „trzęsą się" w miejscu. Przy podgrzewaniu ciała cząsteczki trzęsą się coraz bardziej, przez co ta sama liczba cząsteczek zajmuje wtedy więcej miejsca. Przy dalszym ogrzewaniu cząsteczki opuszczają swoje miejsca i zaczynają pływać po całej objętości ciała. Ciało przechodzi w stan ciekły.
— Teraz wiem, co jest przyczyną rozszerzalności cieplnej ciała. Latem atomy żelaza drgają silniej niż zimą i dlatego szyny kolejowe są dłuższe. Dobrze, że atomy w szynach nie poruszają się zbyt silnie, bo co stałoby się, gdyby szyny się stopiły?

Towarzyskie cząsteczki

— Temperatura topnienia żelaza wynosi +1538°C, nie ma więc obawy, że żelazo stopi się przy największym nawet upale. Czy zastanawiałeś się natomiast nad przyczynami powstawania ciał stałych i cieczy? Jak wyglądałby świat, gdyby materia istniała tylko w postaci gazu lub proszku!
— Nigdy przedtem o tym nie myślałem, ale teraz wydaje mi się to oczywiste. Cząsteczki ciał muszą się przyciągać. Im silniej się przyciągają, tym łatwiej jest im utworzyć ciało w stanie stałym.
— Rzeczywiście, cząsteczki różnych substancji nie są jednakowo towarzyskie. Dlatego spotykamy substancje o tak różnych właściwościach. Jedne, jak na przykład tlen,

są normalnie gazami i, żeby je skroplić, trzeba je bardzo silnie oziębić. Inne występują w postaci ciał stałych i topią się w bardzo wysokiej temperaturze. Ciekawe jest, że nawet te bardzo towarzyskie cząsteczki, które lubią trzymać się razem tworząc ciecz lub ciało stałe, nie lubią zbyt dużego tłoku. Zbytnio ściśnięte silnie się odpychają. To jest też bardzo ważne. Pomyśl tylko, co byłoby, gdyby wzajemne odpychanie cząsteczek podłogi i nóg krzesła, na którym siedzisz, nie równoważyło siły ciężkości, która działa na ciebie i na krzesło.

Mierzymy cząsteczki

— Jesteś na pewno ciekaw, na czym polega pomiar czegoś tak małego, jak cząsteczka, ale ... cierpliwości! Najpierw chcę zadać ci parę pytań. Zastanów się i powiedz, co jest najcieńsze?

— Chyba włos, bo mówi się „cienki jak włos".

— Rzeczywiście, tak się mówi, chociaż można wskazać rzeczy o wiele cieńsze. Już lepiej byłoby mówić „cienki jak nić pajęcza", ale i ta, jak się okazuje, jest bardzo gruba w porównaniu z najcieńszymi warstwami cieczy, jakie łatwo można uzyskać. Czy wiesz, na przykład, jak cienka jest powłoka bańki mydlanej? Jej grubość trzeba by powiększyć 100 000 razy, żeby wyniosła tyle, co grubość włosa ludzkiego. Włos w takim powiększeniu miałby grubość około 5 metrów! Jeszcze cieńsze bywają warstewki oliwy rozlanej na wodzie. Mam dla ciebie następne pytanie. Jak ci się zdaje, czy kropla oliwy może pokryć dowolnie dużą powierzchnię, na przykład powierzchnię oceanu?

— Chyba nie. Na pokrycie zbyt dużej powierzchni po prostu nie starczyłoby cząsteczek oliwy, nawet gdyby ułożyły się „parterowo", jedna obok drugiej.

— O to właśnie chodzi. Na tym fakcie oprzemy nasz pomiar średnicy cząsteczki oliwy. Do dokładnie wymytej wanny nalej wody. Następnie spuść na jej powierzchnię małą kropelkę oliwy. Oliwa powoli rozpłynie się po powierzchni wody, ale po pewnym czasie proces ten ustanie i powierzchnia oliwy ustali się. Domyślamy się, że cząsteczki oliwy ułożyły się w warstwę pojedynczą. Grubość tej warstwy równa się po prostu średnicy jednej cząsteczki. Znając objętość kropli i pole powierzchni warstwy możemy obliczyć grubość tej warstwy. Na przykład z kropli o objętości 0,0009 cm^3 uzyskano warstwę o powierzchni około 5000 cm^2. Stąd grubość warstwy:

$$x = \frac{V}{S} = \frac{0{,}0009}{5000}\ \mathrm{cm} \approx 0{,}00000018\ \mathrm{cm}.$$

Jeśli nie masz dość cierpliwości, by doczekać się takiej jednocząsteczkowej warstwy oliwy, nie martw się. Możesz zmierzyć promień plamki oliwy, jaką udało ci się uzyskać, i obliczyć, ile cząsteczek składa się na jej grubość. Wpuściłeś na przykład kroplę o promieniu r około 0,1 cm. Jeśli uzyskałeś warstwę o promieniu R około 10 cm, to jej grubość wynosi:

$$x = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi R^2} \approx 0{,}000013\ \mathrm{cm}.$$

Możesz wtedy powiedzieć, że na grubość tej warstewki składa się tylko około kilkunastu cząsteczek.

Małą «Deltę» opracowali: Robert Hajlasz, Przemysław Nowicki, Daria Ziemińska.

Odpowiedź: Lolek. Drogi są równej długości, za to droga Lolka ma mniej zakrętów.