Korzystając z własności 3 można udowodnić, że conv$A$ jest częścią wspólną wszystkich półprzestrzeni zawierających zbiór A. (Dowód tego faktu dla płaszczyzny jest treścią zadań 4 i 5).
Jeśli zbiór A jest domknięty, to conv$A$ jest zbiorem tych punktów q, dla których, dla każdej funkcji liniowej f o wartościach liczbowych, liczba $f(q)$ jest nie większa od kresu górnego zbioru $\{w\colon w = |f(a)|,\ a \in A\}$. Z tego względu conv$A$ nazywa się często *liniową* powłoką wypukłą zbioru A. Jeśli teraz zamiast rodziny wszystkich funkcji liniowych użyjemy jakiejkolwiek rodziny F funkcji liczbowych, to określony tą własnością zbiór nazywamy powłoką *F-wypukłą* zbioru A. Jako pouczające ćwiczenie proponuję Czytelnikowi znalezienie powłoki *F-wypukłej* sumy dwóch odcinków o wspólnym końcu na płaszczyźnie, dla rodziny F składającej się z jednej funkcji $f(x, y) = \ln(x^2+y^2)$ (zwykła powłoka liniowa takiego zbioru jest oczywiście trójkątem).

Zadania

1. Wykazać, że jeśli na płaszczyźnie z układem współrzędnych punkty $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ oraz $x = (x_1, x_2)$ są współliniowe, to istnieje taka liczba $t \in R$, że

$$x = ta+(1-t)b.$$

Wykazać ponadto, że $t \in <0, 1>$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt x leży między a i b lub jest jednym z tych punktów.
2. Wykazać, że jeśli $A \subset R^k$ jest zbiorem wypukłym, punkty $p_1, p_2, \ldots, p_n$ należą do A oraz liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są nieujemne i spełniają warunek $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = 1$, to punkt

$$x = \alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_n a_n$$

też należy do A. (Wsk.: dla $n = 2$ twierdzenie jest prawdziwe z definicji zbioru wypukłego; zastosować indukcję).
3. Pokazać, że wielokąt wypukły na płaszczyźnie jest uwypukleniem zbioru wszystkich swoich wierzchołków.
4. Wykazać, że jeśli f jest funkcją liniową o wartościach liczbowych, określoną na płaszczyźnie kartezjańskiej R^2, to dla dowolnego $\alpha \in R$ zbiór

$$\{p \in R^2 \colon f(p) < \alpha\}$$

jest półpłaszczyzną otwartą. Jaka nierówność określa półpłaszczyznę domkniętą? Czy każdą półpłaszczyznę można opisać w ten sposób?
5. Udowodnić, że jeśli $A \subset R^2$, to conv$A$ jest częścią wspólną wszystkich półpłaszczyzn otwartych zawierających A (Wsk.: skorzystać z zadania 1 i własności 3).

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 61. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$, gdzie $n = 3,4,5,\ldots$. Na zewnątrz tego trójkąta zbudowany jest n-kąt foremny o środku O, przy czym jednym z jego boków jest bok AB trójkąta ABC. Wyznaczyć $\sphericalangle OCB$. (Międzyszkolne Koło Matematyczne w Siedlcach).
Rozwiązanie na str. 12.

M 62. Udowodnić, że jeżeli liczba $(n-1)!+1$ jest podzielna przez liczbę n większą od 1, to n jest liczbą pierwszą. ($k!$ jest to iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do k).
Rozwiązanie na str. 2.

M 63. Ile ma rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych $x_1, x_2, \ldots, x_k$ równanie

$$x_1+x_2+\ldots+x_k = n,$$

gdzie n jest daną liczbą naturalną.
Rozwiązanie na str. 4.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 21. Rura cienkościenna stacza się po nieruchomej równi pochyłej nachylonej pod kątem α do poziomu. Współczynnik tarcia poślizgowego wynosi μ. a) Jaki jest maksymalny kąt α_{max}, przy którym rura stacza się bez poślizgu?. b) W przypadku ruchu z tarciem energia mechaniczna nie spełnia zasady zachowania, część bowiem energii mechanicznej (oznaczmy ją przez $\mathscr{E}$) ulega zamianie na energię wewnętrzną (potocznie: na ciepło). Wydawać by się mogło, że $\mathscr{E}$ powinno być równe po prostu pracy siły tarcia. Czy przypuszczenie to jest poprawne?
Odpowiedzi na str. str. 6 i 8.
(Zadanie Zbigniewa Peradzyńskiego)