Buffon rozwiązywał to zadanie rzucając n razy igłą na stół i zliczając liczbę k tych przypadków, w których igła przecięła którąś z linii. Otrzymał wynik $\hat{p} = \frac{k}{n}$. Zapiszmy wzór (1) w postaci

$$\pi = \frac{2l}{pL}. \tag{2}$$

Jeżeli teraz po prawej stronie wzoru (2) wpiszemy zamiast p oszacowanie tej wielkości $\hat{p} = \frac{k}{n}$ i jeżeli potraktujemy (2) jako określenie liczby π, otrzymamy oszacowanie $\hat{\pi}$ tej właśnie liczby

$$\hat{\pi} = \frac{2ln}{kL}. \tag{3}$$

Znając l, L i dysponując oszacowaniem $\hat{p}$ prawdopodobieństwa p uzyskamy oszacowanie $\hat{\pi}$ znanej skądinąd liczby π!
Eksperyment Buffona był wielokrotnie powtarzany i uzyskiwano zadziwiająco dobre wyniki. Niech Czytelnik zechce sam sprawdzić taki sposób szacowania liczby π. Uzyskany wynik można porównać z bardzo dokładnym przybliżeniem $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ (liczbę π z dokładnością do 100 000 cyfr po przecinku znaleźć można w pracy Shanksa i Wrencha *Calculation of π to 100 000 decimals*, opublikowanej w czasopiśmie «Mathematical Computer», 16 (1962), 76–99).
W związku z tym sposobem rachowania nasuwa się kilka pytań:
1) Czy zawsze oszacowanie $\hat{p}_n$ jest zbieżne z szacowaną wielkością p, gdy $n \to \infty$?. 2) Jaka jest dokładność oszacowania, tzn. co można powiedzieć o wielkości różnicy $|\hat{p}_n - p|$?
Na pytania te postaramy się odpowiedzieć w kolejnych artykułach poświęconych metodom Monte Carlo. Wyjaśnijmy w nich oczywiście również, skąd bierze się nieco niezwykła nazwa ,,metoda Monte Carlo" dla takiego sposobu rachowania. Podamy przykłady zadań, które rozwiązuje się tymi metodami. Opowiemy również o tym, jak można opisane wyżej eksperymenty przeprowadzać na komputerze; okazuje się, że współczesny komputer może ,,wykonać" dziesiątki tysięcy rzutów monetą w ciągu sekundy, a takie liczby eksperymentów dają już zwykle dostatecznie dokładne oszacowania poszukiwanych wielkości. Chętnie również odpowiemy na pytania Czytelników dotyczące omawianych metod Monte Carlo.

Sprostowanie

W numerze majowym Delty do artykułu ,,Ciężkie jony" dr K. Siwek-Wilczyńskiej zakradły się z winy redakcji trzy poważne błędy. Zdanie ,,Ogółem wyprodukowano tam około 30 nieznanych przedtem nuklidów lekkich pierwiastków o skrajnie ,,nadmiarowej" zawartości nukleonów." powinno być zastąpione przez zdanie ,,Ogółem wyprodukowano tam około 30 nieznanych przedtem nuklidów będących skrajnie neutrono-nadmiarowymi izotopami lekkich pierwiastków." Zdanie: ,,Obliczenia teoretyczne sugerują mianowicie, że nuklidy posiadające około 114 i więcej protonów i około 184 i więcej neutronów powinny charakteryzować się wyjątkową stabilnością jądrową w stosunku do nuklidów sąsiednich." powinno być zastąpione przez zdanie: ,,Obliczenia teoretyczne sugerują mianowicie, że nuklidy posiadające około 114 protonów i około 184 neutronów powinny charakteryzować się wyjątkową stabilnością jądrową w stosunku do sąsiednich nuklidów."
Zdanie: ,,Należy oczekiwać, że dwa jądra uranu w ogóle nie mogą ulec fuzji, gdyż potencjał wzajemnego oddziaływania jest już prawdopodobnie dodatni (co odpowiada odpychaniu) w całym zakresie względnych odległości." powinno być zastąpione przez zdanie: ,,Należy oczekiwać, że dwa jądra uranu w ogóle nie mogą ulec fuzji, gdyż potencjał wzajemnego oddziaływania jest prawdopodobnie odpychający w całym zakresie względnych odległości."
Bardzo przepraszamy Autorkę i Czytelników.

Sztuka wygrywania

Dr Tadeusz B. IWIŃSKI

$$\begin{pmatrix} 5, -5 & -2, 2 \\ 0, 0 & 1, -1 \end{pmatrix}$$

,,macierz" gry 2×2 o sumie zerowej

Konflikt interesów nie zawsze polega na tym, że w każdym jego rozstrzygnięciu jedna strona może zyskać dokładnie tyle, ile druga musi stracić. Rokowania handlowe są przykładem gry, w której żadna ze stron nie ma zamiaru tracić; konflikt interesów polega na tym, że każda ze stron chce zyskać jak najwięcej. Rozważany w poprzednim odcinku ,,Sztuki wygrywania" («Delta», 1975, 5) dylemat więźnia był przykładem konfliktu, w którym żadna ze stron nic nie może zyskać, a każdy z graczy dąży do tego, by stracić jak najmniej. Modelami sytuacji tego typu są to znaczy gry, w których wypłaty obu graczy odpowiadające określonym wyborom strategii nie muszą dawać w sumie zera. Gry tego rodzaju opisujemy przy pomocy ,,macierzy wypłat", której elementami są pary liczb: wypłaty obu graczy odpowiadające parze wybranych przez nich strategii. Pierwsza liczba takiej pary oznacza wypłatę gracza I, druga — wypłatę gracza II. Jak już pokazywaliśmy (dylemat więźnia), w grach tego rodzaju kierowanie się zasadą maksymalizacji własnego zysku bez oglądania się na partnera prowadzi czasem do wyników, które są w gruncie rzeczy najgorsze z możliwych. W grze opisanej podaną obok ,,macierzą wypłat" gracze posługujący się taką zasadą wybiorą oczywiście parę strategii (B,B) — i bardzo na tym stracą. [Kto to lubi, może tej grze przypisać następującą fabułę: w miasteczku są dwie małe piekarnie, których właściciele bardzo się nie lubią i unikają jakichkolwiek kontaktów. Strategia B oznacza decyzję o wyprodukowaniu samych bułek, strategia C — samego chleba. Ze względów technicznych żadna z piekarni nie może tej samej nocy wypiekać i bułek, i chleba. Jeśli obie rzucą na rynek bułki, zysk netto każdej z nich wyniesie po 1J (J = jednostka obliczeniowa). Jeśli każda z nich wyprodukuje co innego, zysk na wypieku chleba wyniesie 5J, natomiast produkcja bułek da tylko zwrot kosztów: zysk netto wyniesie 0J. Jeśli obie wyprodukują chleb, zarobią po 2J].

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} \mathrm{B} & \mathrm{C} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{array} & \begin{pmatrix} 1{,}1 & 5{,}0 \\ 0{,}5 & 2{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

,,macierz" gry 2×2 o sumie niezerowej

Wystąpmy wobec graczy w roli arbitra — bezstronnego sędziego, na którego zdanie zdają się obaj bez zastrzeżeń. Co możemy doradzić? Jedno wyjście jest oczywiste: jeśli obaj zgodzą się stosować systematycznie czystą drugą strategię,

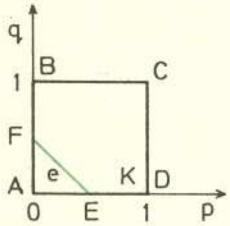
to w rezultacie obaj zyskają. Czy jednak rozsądny arbiter nie może zaproponować korzystniejszego wyjścia?
Zastanówmy się, co by było, gdyby obaj gracze zaczęli stosować strategie mieszane, jednak w sposób całkowicie losowy. [W interpretacji piekarniczej oznaczałoby to, że każda piekarnia zmienia rodzaj produkowanego pieczywa, ale nie uzgadnia tych zmian z firmą konkurencyjną].
Załóżmy, że I stosuje strategię B z częstością p, a strategię C — z częstością $1-p$; gracz II natomiast stosuje B z częstością q, a C — z $1-q$. Jeśli przez $x(p, q)$ oznaczymy przeciętną wypłatę gracza I odpowiadającą zastosowaniu przez nich takich mieszanek, a przez $y(p, q)$ — odpowiednią przeciętną wypłatę gracza II, to

$$(x(p, q), y(p, q)) = pq(1,1)+p(1-q)(5,0)+q(1-p)(0,5)+(1-p)(1-q)(2,2),$$

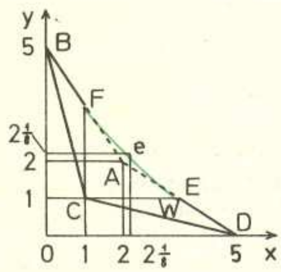
skąd

$$x(p, q) = 3p-2q-2pq+2,$$

$$y(p,q) = 3q-2p-2pq+2,$$



gdzie $0 \leqslant p \leqslant 1$, $0 \leqslant q \leqslant 1$. W interpretacji geometrycznej para (p, q) jest dowolnym punktem kwadratu jednostkowego K (zob. rys.), natomiast odpowiadająca jej para $(x(p, q), y(p, q))$ — dowolnym punktem obszaru W w prawej części rysunku. Zbiór W nazywa się *niekooperacyjnym obszarem wypłat* danej gry. Dla uruchomienia wyobraźni: obszar W powstaje z kwadratu K przez zagięcie rogu wzdłuż kolorowej linii e oraz symetrię i takie rozciągnięcie otrzymanego pięciokąta, by obrazami punktów A, B, C, D, E i F w K były oznaczone tak samo punkty obszaru W; obrazem e jest narysowana kolorem krzywa e stanowiąca część brzegu W. Odcinek e jest podzbiorem prostej o równaniu



$$p+q = \frac{1}{2}.$$

Jeśli (w roli arbitra) uważnie przyjrzymy się rysunkowi, to z łatwością dojdziemy do wniosku, że możemy graczom proponować takie tylko pary strategii mieszanych, które leżą na odcinku e. Każda taka para daje bowiem każdemu graczowi nie mniej, niż jest on w stanie zapewnić sobie sam, a przy tym dla każdej wypłaty odpowiadającej takiej parze nie można podać w zbiorze W wypłaty, która byłaby lepsza dla obu graczy jednocześnie. Którą jednak z takich par strategii zaproponować? Tu można posłużyć się zasadą symetrii: gra jest jednakowa z punktu widzenia każdego z graczy. Nie widać więc żadnego powodu, by rozstrzygnięcie arbitrażowe faworyzowało któregokolwiek z nich — proponujemy więc, ażeby każdy z nich stosował strategię mieszaną (1/4, 3/4), tzn. przeciętnie raz na cztery gry stosował B. Wtedy $p = q = \frac{1}{4}$ oraz

$$x\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = y\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}\cdot 1+\frac{3}{16}\cdot 0+\frac{3}{16}\cdot 5+\frac{9}{16}\cdot 2 = 2\frac{1}{8}$$

i każdy z nich, wygrywając czasem 0, czasem 1, czasem 2 i czasem 5 (z odpowiednimi częstościami), zarobi przeciętnie $2\frac{1}{8}$. [Nasi piekarze mogą więc, unikając jakichkolwiek pertraktacji i uzgodnień, zapewnić sobie średnio około 2,13J, jeśli tylko zaufają arbitrowi i będą losowo zmieniać rodzaj pieczywa, tak aby przeciętnie 25% ich wyrobów stanowiły bułki]. Okazuje się jednak, że proponując to rozwiązanie jeszcze nie wywiązaliśmy się z roli arbitra najlepiej, możemy bowiem zaproponować rozwiązanie, które każdemu z graczy przyniesie większą niż $2\frac{1}{8}$ przeciętną wygraną. Zobaczmy bowiem, co by było, gdyby zaproponować takie rozwiązanie, w którym zmiany strategii poszczególnych graczy są uzgodnione: stosowane przez nich strategie mieszane nie są niezależne.

Przypuśćmy, że zaproponowaliśmy następujące rozwiązanie: gracz I stosuje strategię B z częstością p, gracz II stosuje strategię B z częstością $1-p$ i przy tym zawsze strategie ich są różne. W takiej sytuacji wypłata przeciętna gracza I wyniesie

$$p\cdot 0+(1-p)\cdot 5 = 5-5p,$$

a wypłata gracza II

$$(1-p)\cdot 0+p\cdot 5 = 5p.$$

Widać więc, że wypłaty przeciętne układają się na odcinku łączącym punkty (5,0) i (0,5) na rysunku obok, a więc leżą poza zbiorem W!

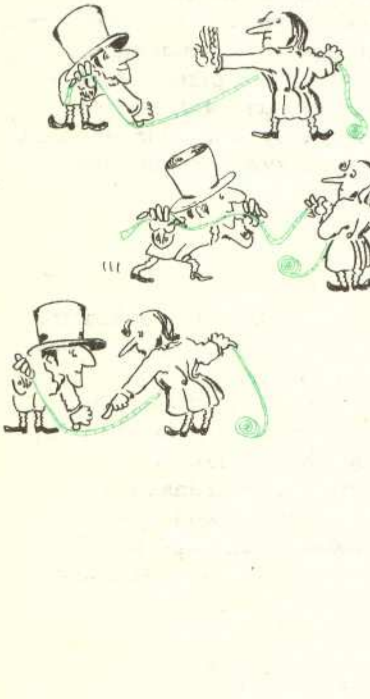
Rozwiązanie zadania. M 61. Ponieważ

$\sphericalangle ACB + \sphericalangle AOB = \frac{n-2}{n} \cdot 180° = 180°$,

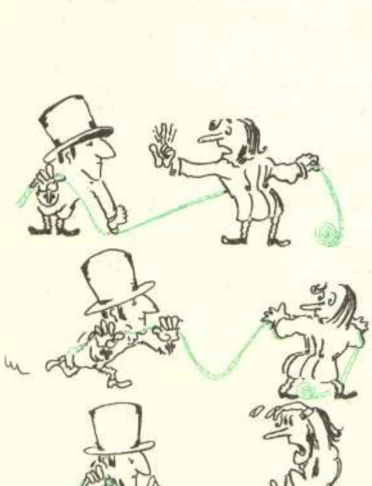
więc na czworokącie $ACBO$ można opisać okrąg. Kąty OCB i OAB jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe, $\sphericalangle OAB =$

$= \frac{n-2}{n} \cdot 180° + \frac{2}{n} 90°$ i tyle też wynosi $\sphericalangle OCB$.

Uwaga. Przypadek $n = 4$ był treścią zadania M 40 «Delta», 1975, 2. Rozwiązanie to jest w przypadku $n = 4$ inne od opublikowanego rozwiązania zadania M 40.



Zob. artykuł o zbiorach wypukłych, str. 3.



Jeśli $p < \frac{1}{5}$ lub $p > \frac{4}{5}$, to propozycja taka będzie nie do przyjęcia dla jednego z graczy: będzie mu dawała mniej, niż sam jest sobie w stanie zapewnić (tzn. mniej niż 1). Dla $p \in \langle \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \rangle$ każda taka propozycja jest optymalna w tym sensie, że daje każdemu z graczy nie mniej, niż jest sam w stanie sobie zapewnić, i nie istnieje propozycja lepsza jednocześnie dla obu z nich. Ponadto, wspomniana wyżej zasada symetrii nakazuje przyjąć $p = \frac{1}{2}$. Taka propozycja nie faworyzuje żadnego z graczy i jest dla każdego z nich lepsza niż poprzednio zaproponowane rozwiązanie arbitrażowe; zapewnia każdemu średnią wygraną wynoszącą $2\frac{1}{2}$.

[Nasi piekarze winni więc np. codziennie zmieniać gatunek pieczywa — w taki jednak sposób, by jeden piekł bułki wtedy i tylko wtedy, gdy drugi piecze chleb. Oznacza to, że nawet z czysto ekonomicznego punktu widzenia powinni odrzucić w kąt niechęci i nawiązać pewną współpracę].

Czy na tym koniec? Tyle razy ulepszaliśmy proponowane rozstrzygnięcie arbitrażowe, że można wątpić, czy i podanego ostatnio nie da się poprawić. Chcąc wywiązać się w pełni z roli arbitra musimy to sprawdzić. Wiemy już, że przy w pełni niezależnym stosowaniu strategii mieszanych uzyskujemy wypłaty wypełniające niekooperacyjny obszar wypłat. Wiemy też, że odrzucając warunek niezależności możemy otrzymywać wypłaty spoza tego obszaru. Zbadajmy więc, jaki jest zbiór W_1 wszystkich możliwych wypłat odpowiadających niekoniecznie niezależnym strategiom mieszanym. Zbiór ten nazwiemy *kooperacyjnym obszarem wypłat*.

W tym celu zauważmy przede wszystkim, że do kooperacyjnego obszaru wypłat będzie należała każda para wypłat postaci

$$(*) \qquad (x, y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(5,0) + \alpha_3(0,5) + \alpha_4(2,2),$$

gdzie $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ i wszystkie α_i są nieujemne. Rzeczywiście, równość (*) oznacza, że x i y są wypłatami oczekiwanymi przez graczy przy realizacji następującej umowy: „Z częstością α_1 obaj stosujemy B; z częstością α_2 gracz I stosuje C, a gracz II stosuje B; z częstością α_3 I stosuje B, a II — C; w pozostałych przypadkach (tzn. z częstością α_4) obaj stosujemy C".

Ponieważ zaś każda umowa o uzgodnieniu strategii musi być tej postaci, to wynika stąd, że równości postaci (*) opisują wszystkie pary wypłat należące do W_1. Z drugiej strony równość (*) oznacza, że wypłata (x, y) należy do uwypuklenia zbioru złożonego z czterech par wypłat odpowiadających zastosowaniu przez obu graczy strategii czystych. Ponieważ zaś każda para wypłat za zastosowanie strategii czystych należy również do niekooperacyjnego obszaru wypłat W i uwypuklenie W musi zawierać w sobie uwypuklenie każdego swego podzbioru, to

$$(**) \qquad W_1 \subset \operatorname{conv} W,$$

gdzie $\operatorname{conv} W$ oznacza uwypuklenie zbioru W.

Zauważmy jeszcze, że jeśli dwa punkty (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) należą do niekooperacyjnego obszaru wypłat, to cały odcinek łączący te punkty należy do kooperacyjnego obszaru wypłat W_1. Wynika to z prostego przeliczenia. Jeśli bowiem (x, y) jest punktem tego odcinka, to istnieje liczba $t \in \langle 0, 1 \rangle$ taka, że

$$(x, y) = t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2).$$

Jeśli więc założymy, że (x_i, y_i) jest wynikiem niezależnego stosowania strategii mieszanych $(p_i, 1-p_i)$ gracza I oraz $(q_i, 1-q_i)$ gracza II $(i = 1, 2)$, to

$(x_1, y_1) = p_1 q_1(1,1) + p_1(1-q_1)(5,0) + (1-p_1)q_1(0,5) + (1-p_1)(1-q_1)(2,2) =$
$= \alpha_1(1,1) + \alpha_2(5,0) + \alpha_3(0,5) + \alpha_4(2,2)$,

gdzie $\alpha_1 = p_1 q_1$ itd. Wypłatę (x_2, y_2) można analogicznie zapisać w postaci

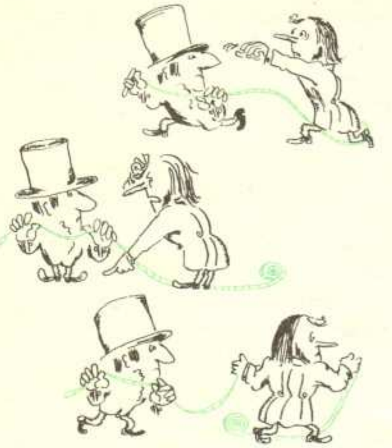
$$(x_2, y_2) = \beta_1(1,1) + \beta_2(5,0) + \beta_3(0,5) + \beta_4(2,2).$$

Stąd

$(x, y) = [t\alpha_1 + (1-t)\beta_1](1,1) + [t\alpha_2 + (1-t)\beta_2](5,0) + [t\alpha_3 + (1-t)\beta_3](0,5) +$
$+ [t\alpha_4 + (1-t)\beta_4](2,2)$.

Ponieważ zaś $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ (proszę to sprawdzić), to również suma liczb w nawiasach kwadratowych jest jedynką, wynosi bowiem $t(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + (1-t)(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) = t + (1-t)$, i wobec tego

$$(x, y) \in W_1;$$



punkt (x, y) należy do kooperacyjnego obszaru wypłat. Wynika stąd, że

$$(***) \qquad \operatorname{conv} W \subset W_1 .$$

Z zawierań (**) i (***) wnioskujemy, że

$$\operatorname{conv} W = W_1 ,$$

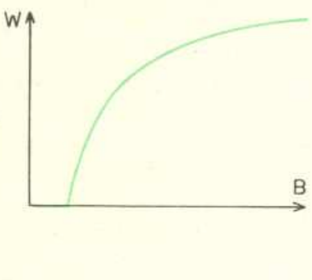
i otrzymujemy następujące twierdzenie;
Kooperacyjny obszar wypłat jest uwypukleniem niekooperacyjnego obszaru wypłat. Jest to przy tym zbiór wszystkich wypłat możliwych do uzyskania w danej grze.
Z twierdzenia tego wynika, że podane przez nas ostatnie rozwiązanie arbitrażowe jest w istocie najlepszym z możliwych do zaproponowania.
[Gdyby piekarze znali to twierdzenie, to nie musieliby uciekać się do arbitrażu. Każdy z nich mógłby sobie obliczyć, że najlepsze rozwiązanie, jakie może zaproponować najlepszy nawet arbiter, to zastosowanie uzgodnionej strategii „(B, C) z częstością $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ oraz (C, B) z częstością $\alpha_3 = \frac{1}{2}$" i wyciągnąć stąd wnioski praktyczne: podjąć rokowania, uzgodnić, że stosują tę właśnie strategię, i ustalić sposób jej realizacji].

Laboratorium w domu

Prawo Webera-Fechnera

Dr Jan A. GAJ

Proponuję Wam dzisiaj wycieczkę na peryferie fizyki, ku jej granicom z naukami o organizmach żywych. Spacer to niewątpliwie zdrowy w czasach, gdy wąska specjalizacja zaczyna stanowić realne niebezpieczeństwo dla swobody myśli twórczej naukowca. Prawo Webera–Fechnera zajmuje się związkiem między wrażeniem W a wywołującym je bodźcem B. Zauważmy od razu, że nie będzie to zależność liniowa: te same przyrosty bodźca dadzą różne efekty w zależności od wielkości bodźca już działającego; nagroda pieniężna wysokości np. 1000 zł zrobi zupełnie inne wrażenie na przeciętnym studencie niż na dyrektorze fabryki.



Aby przejść do konkretów, sformułujemy rozważane prawo w sposób następujący: **Wrażenie W wywołane bodźcem B jest proporcjonalne do logarytmu wielkości bodźca.** Wzorem zapiszemy to tak:

$$W = A \log \frac{B}{B_0} . \qquad (1)$$

Należy jeszcze dodać uzupełnienie, że dla $B < B_0$ wzór (1) zastępujemy równością $W = 0$ (wrażenie nie może być ujemne). Widać już, że B_0 jest **progową wartością bodźca** — bodziec musi przewyższać B_0, aby wywołać jakiekolwiek wrażenie. Na przykład ucho ludzkie nie słyszy dźwięków o ciśnieniu akustycznym poniżej pewnej wartości. Słyszę już, jak zwolennicy „czystej fizyki" mówią z pogardą:

WRAŻENIE? PRZECIEŻ TEGO SIĘ NIE DA MIERZYĆ!

A jednak wrażenie da się mierzyć, jak każdą „przyzwoitą" wielkość fizyczną. Zauważmy przede wszystkim, że mamy znakomitą naturalną jednostkę: najmniejszy zauważalny przyrost wrażenia. Oglądając po kolei dwa źródła światła każdy potrafi powiedzieć, czy uważa je za świecące równie jasno, czy też jedno świeci jaśniej od drugiego. Po to, żeby różnica jasności dała się zauważać, nie może być dowolnie mała, lecz musi przewyższać pewną minimalną wartość. Zarówno istnienie progu czułości naszych zmysłów, jak i podana wyżej własność „kwantowania" wrażeń wynikają z budowy systemu nerwowego: przekazywanie informacji nie odbywa się w nim jak w sieci telefonicznej, gdzie sygnał może być silniejszy lub słabszy, ale na zasadzie „wszystko albo nic" — nerw pobudzony za słabo nie przekazuje w ogóle sygnału, jeśli natomiast pobudzić go silniej, przekazuje sygnał o wielkości standartowej, niezależnej od siły pobudzenia.
Tu można zapytać: *Jak więc potrafimy odróżniać bodźce silniejsze od słabszych*? Zastanówcie się sami.
Mamy już jednostkę — nazwijmy ją NP. Teraz trzeba podać metodę pomiaru wrażenia wywołanego np. przez określony dźwięk. Oczywiście jeśli nic nie słyszymy, $W = 0$. Wytwarzamy teraz najsłabszy słyszalny dźwięk. Wrażenie wyniesie wtedy $W = 0 + NP = NP$. Z kolei wytwarzamy najsłabszy dźwięk, o którym możemy