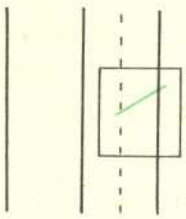
2. Gracz II ma strategię zwycięską w obu pomocniczych grach, ma zatem strategię zwycięską w rozważanej grze.
3 Gracz I ma strategię zwycięską w pierwszej grze pomocniczej, a gracz II w drugiej. Wtedy te dwie strategie pozwalają tym graczom zremisować rozważaną grę.
Przypadek ostatni, gdy gracz I ma strategię zwycięską w drugiej grze pomocniczej, a gracz II w pierwszej, jest, jak łatwo się przekonać, niemożliwy. Każda zatem gra skończona jest albo zdeterminowana z korzyścią dla któregoś z graczy, albo jest grą remisową. Wątpliwe jednak, czy kiedykolwiek będziemy wiedzieli, do której z tych grup należą np. szachy, a w każdym razie ani Fischer ani Karpow nas o tym nie przekonają.
Z punktu widzenia matematyki, gry skończone nie są ciekawe. Następnym razem zajmiemy się problemem gier nieskończonych.

Metody Monte Carlo (I)

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

O ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ ZA POMOCĄ EKSPERYMENTU STATYSTYCZNEGO

Zacznijmy od bardzo łatwego zadania z rachunku prawdopodobieństwa.
Rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Obliczyć prawdopodobieństwo p tego, że na każdej z trzech monet otrzymamy ten sam wynik. Zwykle takie zadania rozwiązuje się w znany sposób. Umawiamy się mianowicie, że monety zostały ponumerowane, i określamy zbiór zdarzeń elementarnych jako zbiór wszystkich uporządkowanych trójek (m_1, m_2, m_3), gdzie m_i oznacza orła lub reszkę na i-tej monecie. Z założenia o symetryczności monet każde z tych zdarzeń jest jednakowo prawdopodobne. Wszystkich zdarzeń jest osiem, zdarzeń zaś sprzyjających — dwa (zdarzenia: orzeł–orzeł–orzeł i reszka–reszka–reszka), otrzymujemy więc $p = \frac{1}{4}$.

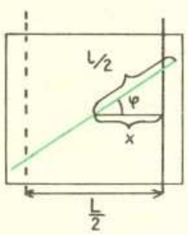


Rys 1

A oto inny sposób rozwiązania naszego zadania. Podrzucamy do góry trzy symetryczne monety, a gdy spadną, sprawdzamy, czy na wszystkich trzech mamy orła lub na wszystkich trzech reszkę. Jeżeli tak, odnotowujemy wynik naszego doświadczenia jako sukces i powtarzamy rzut. Przypuśćmy, że wykonaliśmy n rzutów i że k razy zaobserwowaliśmy sukces. Za przybliżone rozwiązanie zadania przyjmujemy stosunek $\frac{k}{n}$.

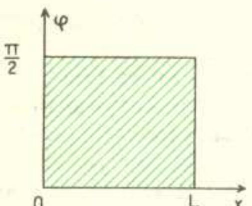
Otrzymane w ten sposób oszacowanie rozwiązania będziemy oznaczali $\hat{p}$ lub, gdy będzie nam zależało na podkreśleniu, że oszacowanie otrzymano na postawie n doświadczeń — symbolem $\hat{p}_n$.

Mamy więc w naszym przypadku $\hat{p} = \frac{k}{n}$. Opisany sposób rozwiązywania zadania wygląda na pierwszy rzut oka nie bardzo poważnie i trudno jest wyobrazić sobie poważny egzamin maturalny, podczas którego uczniowie podrzucają do góry monety, albo poważnych i wielce uczonych fizyków, którzy w ten sposób obliczają rozmiary projektowanych reaktorów jądrowych. Nieco zaskakujący, ale prawdziwy jest fakt, że tego rodzaju metody rachowania — zwane powszechnie metodami Monte Carlo — wymyślono właśnie dla fizyków, którzy w końcu drugiej wojny światowej rozwiązywali nowe i trudne zadania z zakresu fizyki atomowej; a z powstaniem tych metod związane są nazwiska tak wybitnych uczonych, jak John von Neumann i Stanisław Ulam. Wrócimy do tych spraw później, a na razie spójrzmy na jeszcze jedno zadanie.



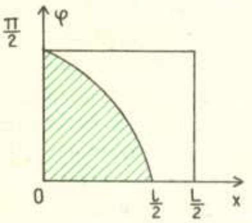
Rys. 2

W XVIII wieku przyrodnik francuski G. L. Buffon rozważał następujące zadanie. Poliniujmy powierzchnię stołu równoległymi prostymi tak, aby odległości między każdymi dwiema sąsiednimi prostymi były równe L. Na ten stół będziemy rzucali losowo („na chybił-trafił") igłę o długości $l < L$. Należy obliczyć prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że igła przetnie którąś z prostych narysowanych na stole.
Podobnie jak poprzednio rozwiążemy najpierw to zadanie dokładnie, korzystając przy tym z pojęć prawdopodobieństwa geometrycznego (por. «Delta», 1975, 6).
Wprowadźmy następujące oznaczenia: x — odległość środka igły od najbliższej prostej, φ — kąt ostry, jaki tworzy igła z prostą prostopadłą do linii narysowanych na stole. Mamy więc zawsze $0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}$ oraz $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ (rys. 1 i 2). Rzucanie igły „losowo" na stół będziemy rozumieli w ten sposób, że punkt (x, φ) ma rozkład jednostajny na prostokącie zakreskowanym na rys. 3.



Rys. 3

Mówiąc niezbyt dokładnie: fakt, że igła może z jednakowym prawdopodobieństwem upaść na każdy punkt stołu i mieć przy tym z jednakowym prawdopodobieństwem każdy kierunek (to jest właśnie treść intuicyjna powiedzenia, że igła jest rzucana „losowo"), interpretujemy jako fakt, że punkt (x, φ) pojawia się losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem, w każdym miejscu określonego wyżej prostokąta.
Dalsze rozwiązanie jest już łatwe. Przecięcie igły z linią narysowaną na stole następuje wtedy i tylko wtedy, gdy $x < \frac{l}{2}\cos\varphi$ (rys. 2). Zbiór tych par (x, φ), dla których $x < \frac{l}{2}\cos\varphi$, zakreskowano na rys. 4. Zgodnie z zasadami rachowania prawdopodobieństw geometrycznych, prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia jest równe stosunkowi pól figury zakreskowanej na rys. 4 do pola całego prostokąta i wynosi



Rys. 4

$$p = \frac{2l}{\pi L}. \tag{1}$$

Buffon rozwiązywał to zadanie rzucając n razy igłą na stół i zliczając liczbę k tych przypadków, w których igła przecięła którąś z linii. Otrzymał wynik $\hat{p} = \frac{k}{n}$. Zapiszmy wzór (1) w postaci

$$\pi = \frac{2l}{pL}. \tag{2}$$

Jeżeli teraz po prawej stronie wzoru (2) wpiszemy zamiast p oszacowanie tej wielkości $\hat{p} = \frac{k}{n}$ i jeżeli potraktujemy (2) jako określenie liczby π, otrzymamy oszacowanie $\hat{\pi}$ tej właśnie liczby

$$\hat{\pi} = \frac{2ln}{kL}. \tag{3}$$

Znając l, L i dysponując oszacowaniem $\hat{p}$ prawdopodobieństwa p uzyskamy oszacowanie $\hat{\pi}$ znanej skądinąd liczby π!
Eksperyment Buffona był wielokrotnie powtarzany i uzyskiwano zadziwiająco dobre wyniki. Niech Czytelnik zechce sam sprawdzić taki sposób szacowania liczby π. Uzyskany wynik można porównać z bardzo dokładnym przybliżeniem $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$ (liczbę π z dokładnością do 100 000 cyfr po przecinku znaleźć można w pracy Shanksa i Wrencha *Calculation of π to 100 000 decimals*, opublikowanej w czasopiśmie «Mathematical Computer», 16 (1962), 76–99).
W związku z tym sposobem rachowania nasuwa się kilka pytań:
1) Czy zawsze oszacowanie $\hat{p}_n$ jest zbieżne z szacowaną wielkością p, gdy $n \to \infty$?. 2) Jaka jest dokładność oszacowania, tzn. co można powiedzieć o wielkości różnicy $|\hat{p}_n - p|$?
Na pytania te postaramy się odpowiedzieć w kolejnych artykułach poświęconych metodom Monte Carlo. Wyjaśnijmy w nich oczywiście również, skąd bierze się nieco niezwykła nazwa „metoda Monte Carlo" dla takiego sposobu rachowania. Podamy przykłady zadań, które rozwiązuje się tymi metodami. Opowiemy również o tym, jak można opisane wyżej eksperymenty przeprowadzać na komputerze; okazuje się, że współczesny komputer może „wykonać" dziesiątki tysięcy rzutów monetą w ciągu sekundy, a takie liczby eksperymentów dają już zwykle dostatecznie dokładne oszacowania poszukiwanych wielkości. Chętnie również odpowiemy na pytania Czytelników dotyczące omawianych metod Monte Carlo.

Sprostowanie

W numerze majowym Delty do artykułu „Ciężkie jony" dr K. Siwek-Wilczyńskiej zakradły się z winy redakcji trzy poważne błędy. Zdanie „Ogółem wyprodukowano tam około 30 nieznanych przedtem nuklidów lekkich pierwiastków o skrajnie „nadmiarowej" zawartości nukleonów." powinno być zastąpione przez zdanie „Ogółem wyprodukowano tam około 30 nieznanych przedtem nuklidów będących skrajnie neutrono-nadmiarowymi izotopami lekkich pierwiastków." Zdanie: „Obliczenia teoretyczne sugerują mianowicie, że nuklidy posiadające około 114 i więcej protonów i około 184 i więcej neutronów powinny charakteryzować się wyjątkową stabilnością jądrową w stosunku do nuklidów sąsiednich." powinno być zastąpione przez zdanie: „Obliczenia teoretyczne sugerują mianowicie, że nuklidy posiadające około 114 protonów i około 184 neutronów powinny charakteryzować się wyjątkową stabilnością jądrową w stosunku do sąsiednich nuklidów."
Zdanie: „Należy oczekiwać, że dwa jądra uranu w ogóle nie mogą ulec fuzji, gdyż potencjał wzajemnego oddziaływania jest już prawdopodobnie dodatni (co odpowiada odpychaniu) w całym zakresie względnych odległości." powinno być zastąpione przez zdanie: „Należy oczekiwać, że dwa jądra uranu w ogóle nie mogą ulec fuzji, gdyż potencjał wzajemnego oddziaływania jest prawdopodobnie odpychający w całym zakresie względnych odległości."
Bardzo przepraszamy Autorkę i Czytelników.

Sztuka wygrywania

Dr Tadeusz B. IWIŃSKI

$$\begin{pmatrix} 5, -5 & -2, & 2 \\ 0, & 0 & 1, -1 \end{pmatrix}$$

„macierz" gry 2×2 o sumie zerowej

Konflikt interesów nie zawsze polega na tym, że w każdym jego rozstrzygnięciu jedna strona może zyskać dokładnie tyle, ile druga musi stracić. Rokowania handlowe są przykładem gry, w której żadna ze stron nie ma zamiaru tracić; konflikt interesów polega na tym, że każda ze stron chce zyskać jak najwięcej. Rozważany w poprzednim odcinku „Sztuki wygrywania" («Delta», 1975, 5) dylemat więźnia był przykładem konfliktu, w którym żadna ze stron nic nie może zyskać, a każdy z graczy dąży do tego, by stracić jak najmniej. Modelami sytuacji tego typu są

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 1{,}1 & 5{,}0 \\ 0{,}5 & 2{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

„macierz" gry 2×2 o sumie niezerowej

to znaczy gry, w których wypłaty obu graczy odpowiadające określonym wyborom strategii nie muszą dawać w sumie zera. Gry tego rodzaju opisujemy przy pomocy „macierzy wypłat", której elementami są pary liczb: wypłaty obu graczy odpowiadające parze wybranych przez nich strategii. Pierwsza liczba takiej pary oznacza wypłatę gracza I, druga — wypłatę gracza II. Jak już pokazywaliśmy (dylemat więźnia), w grach tego rodzaju kierowanie się zasadą maksymalizacji własnego zysku bez oglądania się na partnera prowadzi czasem do wyników, które są w gruncie rzeczy najgorsze z możliwych. W grze opisanej podaną obok „macierzą wypłat" gracze posługujący się taką zasadą wybiorą oczywiście parę strategii (B,B) — i bardzo na tym stracą. [Kto to lubi, może tej grze przypisać następującą fabułę: w miasteczku są dwie małe piekarnie, których właściciele bardzo się nie lubią i unikają jakichkolwiek kontaktów. Strategia B oznacza decyzję o wyprodukowaniu samych bułek, strategia C — samego chleba. Ze względów technicznych żadna z piekarni nie może tej samej nocy wypiekać i bułek, i chleba. Jeśli obie rzucą na rynek bułki, zysk netto każdej z nich wyniesie po 1J (J = jednostka obliczeniowa). Jeśli każda z nich wyprodukuje co innego, zysk na wypieku chleba wyniesie 5J, natomiast produkcja bułek da tylko zwrot kosztów: zysk netto wyniesie 0J. Jeśli obie wyprodukują chleb, zarobią po 2J].
Wystąpmy wobec graczy w roli arbitra — bezstronnego sędziego, na którego zdanie zdają się obaj bez zastrzeżeń. Co możemy doradzić? Jedno wyjście jest oczywiste: jeśli obaj zgodzą się stosować systematycznie czystą drugą strategię,