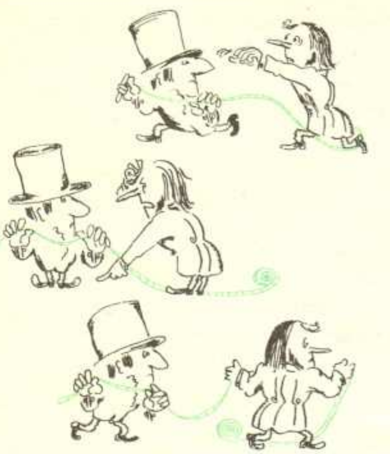


punkt (x, y) należy do kooperacyjnego obszaru wypłat. Wynika stąd, że

$$(***) \qquad \operatorname{conv} W \subset W_1 .$$

Z zawierań (**) i (***) wnioskujemy, że

$$\operatorname{conv} W = W_1 ,$$

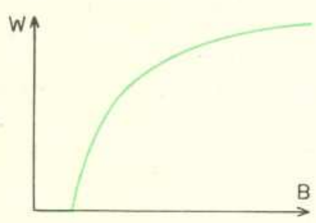
i otrzymujemy następujące twierdzenie;
Kooperacyjny obszar wypłat jest uwypukleniem niekooperacyjnego obszaru wypłat. Jest to przy tym zbiór wszystkich wypłat możliwych do uzyskania w danej grze.
Z twierdzenia tego wynika, że podane przez nas ostatnie rozwiązanie arbitrażowe jest w istocie najlepszym z możliwych do zaproponowania.
[Gdyby piekarze znali to twierdzenie, to nie musieliby uciekać się do arbitrażu. Każdy z nich mógłby sobie obliczyć, że najlepsze rozwiązanie, jakie może zaproponować najlepszy nawet arbiter, to zastosowanie uzgodnionej strategii „(B, C) z częstością $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ oraz (C, B) z częstością $\alpha_3 = \frac{1}{2}$" i wyciągnąć stąd wnioski praktyczne: podjąć rokowania, uzgodnić, że stosują tę właśnie strategię, i ustalić sposób jej realizacji].

Laboratorium w domu

Prawo Webera-Fechnera

Dr Jan A. GAJ

Proponuję Wam dzisiaj wycieczkę na peryferie fizyki, ku jej granicom z naukami o organizmach żywych. Spacer to niewątpliwie zdrowy w czasach, gdy wąska specjalizacja zaczyna stanowić realne niebezpieczeństwo dla swobody myśli twórczej naukowca. Prawo Webera–Fechnera zajmuje się związkiem między wrażeniem W a wywołującym je bodźcem B. Zauważmy od razu, że nie będzie to zależność liniowa: te same przyrosty bodźca dadzą różne efekty w zależności od wielkości bodźca już działającego; nagroda pieniężna wysokości np. 1000 zł zrobi zupełnie inne wrażenie na przeciętnym studencie niż na dyrektorze fabryki. Aby przejść do konkretów, sformułujemy rozważane prawo w sposób następujący: **Wrażenie W wywołane bodźcem B jest proporcjonalne do logarytmu wielkości bodźca.** Wzorem zapiszemy to tak:

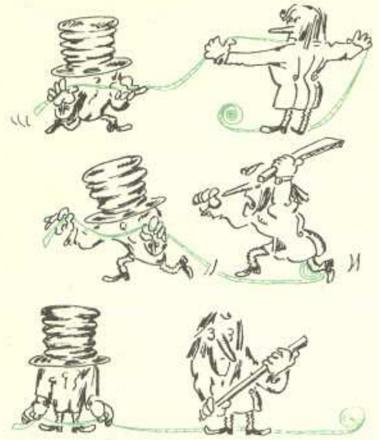


$$W = A \log \frac{B}{B_0} . \tag{1}$$

Należy jeszcze dodać uzupełnienie, że dla $B < B_0$ wzór (1) zastępujemy równością $W = 0$ (wrażenie nie może być ujemne). Widać już, że B_0 jest **progową wartością bodźca** — bodziec musi przewyższać B_0, aby wywołać jakiekolwiek wrażenie. Na przykład ucho ludzkie nie słyszy dźwięków o ciśnieniu akustycznym poniżej pewnej wartości. Słyszę już, jak zwolennicy „czystej fizyki" mówią z pogardą:

WRAŻENIE? PRZECIEŻ TEGO SIĘ NIE DA MIERZYĆ!

A jednak wrażenie da się mierzyć, jak każdą „przyzwoitą" wielkość fizyczną. Zauważmy przede wszystkim, że mamy znakomitą naturalną jednostkę: najmniejszy zauważalny przyrost wrażenia. Oglądając po kolei dwa źródła światła każdy potrafi powiedzieć, czy uważa je za świecące równie jasno, czy też jedno świeci jaśniej od drugiego. Po to, żeby różnica jasności dała się zauważać, nie może być dowolnie mała, lecz musi przewyższać pewną minimalną wartość. Zarówno istnienie progu czułości naszych zmysłów, jak i podana wyżej własność „kwantowania" wrażeń wynikają z budowy systemu nerwowego: przekazywanie informacji nie odbywa się w nim jak w sieci telefonicznej, gdzie sygnał może być silniejszy lub słabszy, ale na zasadzie „wszystko albo nic" — nerw pobudzony za słabo nie przekazuje w ogóle sygnału, jeśli natomiast pobudzić go silniej, przekazuje sygnał o wielkości standartowej, niezależnej od siły pobudzenia.
Tu można zapytać: *Jak więc potrafimy odróżniać bodźce silniejsze od słabszych*? Zastanówcie się sami.
Mamy już jednostkę — nazwijmy ją NP. Teraz trzeba podać metodę pomiaru wrażenia wywołanego np. przez określony dźwięk. Oczywiście jeśli nic nie słyszymy, $W = 0$. Wytwarzamy teraz najsłabszy słyszalny dźwięk. Wrażenie wyniesie wtedy $W = 0 + NP = NP$. Z kolei wytwarzamy najsłabszy dźwięk, o którym możemy



powiedzieć, że jest silniejszy od poprzedniego. Wywoła on wrażenie $W = NP + NP = 2\,NP$. Kolejno wytwarzamy tak dźwięki o wrażeniu $3NP$, $4NP$ itd., aż dojdziemy do dźwięku równie silnego jak badany, ustalając w ten sposób liczbę „cegiełek" NP odpowiadających wrażeniu wywołanemu przez badany dźwięk.
A więc można mierzyć wrażenie!
Wielu z Was powie w tym miejscu:
Mimo wszystko nie wydaje się to precyzyjne. Jednostka NP jest określona w sposób, który nie gwarantuje jej stałości przy zmianach pory dnia, pogody czy wreszcie człowieka, którego poddajemy badaniom. Przy dodawaniu wielu małych jednostek NP niedokładność wyniku jeszcze się powiększa.
To prawda. Jest to jednak cena, jaką płacimy chcąc stosować pojęcia fizyczne do tak skomplikowanego tworu, jakim jest człowiek. Poza tym niedokładność tę można znacznie zmniejszyć stosując metody statystyczne — prowadząc badania wielokrotnie w różnych warunkach z różnymi ludźmi.
Określimy teraz, o jaką wartość ΔB musi wzrosnąć bodziec B, aby dało się to zauważyć, czyli aby wywołać jednostkową zmianę wrażenia NP. Przekształcamy w tym celu równość (1) do postaci:

$$B = B_0 \cdot 10^{W/A}. \tag{2}$$

Przy wzroście B o ΔB, W wzrasta o NP:

$$B + \Delta B = B_0 \cdot 10^{(W+NP)/A}. \tag{3}$$

Proste przekształcenie algebraiczne wzorów (2) i (3) daje:

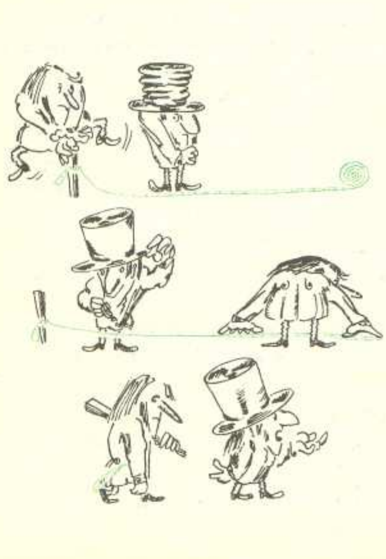
$$\Delta B = B(10^{NP/A} - 1),$$

co można odczytać następująco: **najmniejszy odczuwalny przyrost bodźca jest proporcjonalny do wielkości bodźca już działającego**. Otrzymana forma prawa Webera–Fechnera jest wygodna do sprawdzania doświadczalnego, nie wymaga bowiem skomplikowanej procedury pomiaru wrażenia*. Możemy więc już rozpocząć

EKSPERYMENTY NA CZŁOWIEKU

Po zaopatrzeniu się w człowieka dajemy mu do ręki jakiś przedmiot, np. pustą litrową butelkę, i każemy mu zamknąć oczy. Następnie obciążamy trzymany przez niego przedmiot dodatkowym niewielkim ciężarkiem o ciężarze P i określamy, przy jakiej najmniejszej wartości ΔP badany zauważy zwiększenie ciężaru. To samo powtarzamy przy innej wartości ciężaru P trzymanego przedmiotu. Najprościej zrealizować to używając butelki napełnianej wodą w różnym stopniu. Najlepiej obciążać ją drobnymi przedmiotami zawieszonymi na niej na nitce (nitkę do butelki można przylepić plastrem). Początkowo trzymamy przedmiot nieznacznie uniesiony, tak aby nitka nie była napięta, a następnie ostrożnie opuszczamy go. Przy badaniu, czy ΔP jest proporcjonalne do P, nie musimy wyrażać ich w tych samych jednostkach. W razie trudności z ważeniem małych przedmiotów możemy użyć jednakowych monet do zawieszania i wyrażać ΔP w jednostkach ciężaru jednej monety. Sporządzając wykres ΔP w zależności od P możemy ocenić, w jakim stopniu proporcjonalność jest spełniona. Oczywiście musimy pamiętać, że robiąc doświadczenia tylko na jednej lub paru osobach i nie rozporządzając odpowiednio dużym materiałem statystycznym otrzymamy wyniki mało dokładne i w jakiś sposób zdeformowane. Sprawdzenie zgodności tych wyników z prawem Webera–Fechnera może więc być w zasadzie jedynie jakościowe. Pozostaje jeszcze pytanie:

CZY TO PRAWO MA JAKIEŚ ZNACZENIE PRAKTYCZNE?



Owszem, i to niemałe. W każdym radioodbiorniku i telewizorze do regulacji siły głosu służy **potencjometr logarytmiczny**, w którym kąt obrotu jest proporcjonalny do logarytmu napięcia na wyjściu potencjometru. W ten sposób (patrz wzór (1)) osiągamy równomierną zmianę wrażenia słuchowego przy obracaniu gałką potencjometru. Używając zwykłego, liniowego potencjometru obserwowalibyśmy przy małych kątach bardzo szybki wzrost wrażenia, a następnie bardzo wolną zmienność (patrz wykres).
Drugi przykład — aż ze Starożytności — to wielkości gwiazdowe wprowadzone przez astronomów na całe wieki przed pomiarami natężenia światła gwiazd. Okazało się, że kolejnym wielkościom gwiazdowym (które astronomowie starali się określić według równomiernie zmieniającego się wrażenia jasności) odpowiadają wartości natężenia światła tworzące postęp geometryczny. Chwila zastanowienia upewnia nas, że właśnie tak być powinno, jeśli wzór (1) ma być słuszny.
Zatwardziałym sceptykom poddaję pod rozwagę przykłady: znormalizowanych formatów papieru, nieco naciągany (?) skali muzycznej oraz dodatkową propozycję doświadczalnego sprawdzenia prawa Webera–Fechnera przez porównanie smaku roztworów cukru o różnym stężeniu. Pomyślnych doświadczeń.

* Zarówno historycznie, jak i logicznie jest to pierwotna forma prawa Webera–Fechnera w stosunku do wzoru (1). Z przeprowadzonego powyżej rozumowania wynika, że wzór (1) spełnia warunek proporcjonalności przyrostu bodźca do wartości istniejącej. Okazuje się, że istnieją także zależności o innej niż (1) postaci, spełniające ten warunek. Jest to bardzo interesujące zagadnienie, wykracza ono jednak poza ramy tego artykułu.