

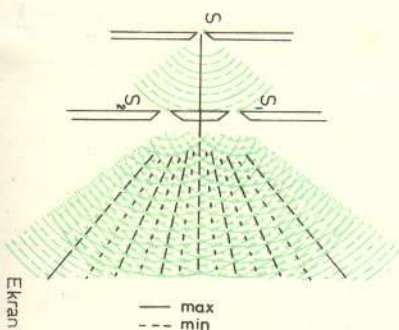
Obserwacja zjawiska interferencji światła nie jest w ogólności sprawą trudną. W życiu codziennym, gdy światło pada na cienkie błonki mydlane lub warstwy tłuszczu na wodzie, zauważamy tworzenie się układów barwnych prążków, które powstają właśnie w wyniku interferencji. Można również łatwo wykonać następujące doświadczenie, które ukazuje powstawanie prążków interferencyjnych. W cienkim sztywnym kawałku papieru wykonujemy końcem igły dwa otwory o wymiarach takich, jak kropka w druku, lub nieco mniejsze. Odległość między otworami winna wynosić około trzech średnic otworu. Przy obserwacji bardzo daleko położonego źródła światła, na przykład odległej lampy ulicznej, gdy kartkę z otworami przysuniemy jak najbliższej oka, stwierdzamy powstawanie prążków interferencyjnych. Oczywiście wykonywanie eksperymentów umożliwiających nie tylko obserwacje, ale też przeprowadzenie pomiarów wymaga odpowiednich przyrządów optycznych.

Interferencja była jednym ze zjawisk, na podstawie których już od czasów Huygensa i Newtona szukano odpowiedzi na pytanie: czym jest światło? (por. «Delta», 1974, 8, art. dra Z. Płochockiego). Chociaż rozwój badań przyrodniczych przyniósł głębokie zrozumienie natury światła i zjawisk z nim związanych, zupełnie nowe zjawiska zaczęto badać od roku 1961, gdy zbudowano laser — nowe źródło promieniowania optycznego. Również zjawisko interferencji dzięki takim wyjątkowym cechom światła laserowego, jak spójność (koherencja) czasowa i przestrzenna, uzyskało nowe znaczenie i znalazło także nowe zastosowanie praktyczne w holografii (por. «Delta», 1974, 2, art. prof. dra B. Karczewskiego). Dla pogładowego wyjaśnienia ważnego pojęcia spójności (koherentności) fal użyjemy łatwo dostępnego dla obserwacji przykładu interferencji fal na powierzchni wody. Wyobraźmy sobie, że dwa drgające pręty wytwarzają fale. Jeśli pręty drgają regularnie z ustaloną, jednakową częstością, to dwie powstające fale dają trwały układ miejsc, w których następuje wzmocnienie lub wygaszenie fal (rys. 1). W tym przypadku fale nazywamy spójnymi. Jeśli jednak pręty drgają nieregularnie, ich częstości zmieniają się niezależnie, to w wypadkowym ruchu falowym nie można odnaleźć cech regularności. Wzmocnienie fal (lub ich osłabienie) następuje raz w jednym, a raz w innym miejscu. W tym przypadku mówimy, że źródła wytwarzają fale niespójne.



Rys. 1

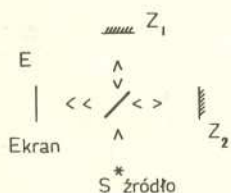
Tomasz Young po raz pierwszy zrealizował dla fal świetlnych omówiony wyżej schemat doświadczenia interferencyjnego. Ilustruje to rys. 2, na którym światło ze szczeliny lub dostatecznie małego otworu S pada na szczeliny S_1 i S_2 , a powstały na ekranie obraz ukazuje prążki jasne i ciemne. Jest to eksperyment, który, choć bez możliwości wykonywania pomiarów, może być łatwo przeprowadzony przez Czytelnika w sposób opisany na początku tego artykułu. W doświadczeniu przedstawionym na rys. 2 szczelina lub otwór S oświetlony jest światłem jednobarwnym z jakiegokolwiek źródła konwencjonalnego (takiego, jak żarówka, świetlówka, płomień itd). Światło z takiego źródła nazywać będziemy światłem termicznym, w odróżnieniu od światła laserowego. Gdy szczeliny S_1 i S_2 są oświetlone bezpośrednio źródłem światła termicznego bez wykorzystania szczeliny S , to nie obserwuje się obrazu interferencyjnego. Gdy jednak źródło odsuwamy bardzo daleko, tak że może być ono uważane za źródło punktowe, powstaje obraz interferencyjny.



Rys. 2

Wykonując odpowiednie pomiary w doświadczeniu Younga można stwierdzić, że istnieje pewna graniczna odległość d między szczelinami S_1 i S_2 . Dla odległości większych niż d obraz interferencyjny znika. Wartość d określa wymiary obszaru, który nazywa się obszarem spójności (koherencji) fali świetlnej dochodzącej do S_1 i S_2 . Światło wychodzące z dwu punktów obszaru spójności daje na ekranie obrazy interferencyjne. Gdy powiększa się rozmiary szczeliny S , obszar koherencji staje się mniejszy. Oznacza to, że przy zwiększaniu szczeliny S należy zmniejszać odległość między szczelinami S_1 i S_2 tak, aby obraz interferencyjny był widoczny. W dokładniejszej analizie doświadczenia Younga można znaleźć związek między kątowymi rozmiarami odległego źródła i wielkością obszaru koherencji.

Innym podstawowym schematem doświadczenia interferencyjnego jest interferometr Michelsona. Rys. 3 przedstawia w uproszczeniu ten układ. Wiązka termicznego światła jednobarwnego wybiega ze źródła S i pada na półprzepuszczające zwierciadło. Powstające dwie wiązki odbijają się od zwierciadeł Z_1 i Z_2 , nakładają się na siebie i dają obraz interferencyjny z charakterystycznymi prążkami. Obraz ten można oglądać bezpośrednio lub zarejestrowany na kliszy w płaszczyźnie E .



Rys. 3



Rozwiązanie zadania M 62. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1, która jest dzielnikiem liczby $(n-1)!+1$. Gdyby n było liczbą złożoną, to miałoby dzielnik a spełniający nierówność $1 < a < n$. Wówczas a byłoby dzielnikiem liczby $(n-1)!$, co zapisujemy $a \mid (n-1)!$; a ponieważ $a \mid (n-1)!+1$, więc liczba 1 musiałaby być podzielna przez $a > 1$, co jest niemożliwe. Liczba n musi więc być liczbą pierwszą. Warto zauważyć, że jeżeli n jest liczbą pierwszą, to $n \mid (n-1)!+1$, co stanowi treść twierdzenia Wilsona. Liczba naturalna $n > 1$ jest więc pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(n-1)!+1$ dzieli się przez n .

Przesuwanie jednego ze zwierciadeł wzdłuż kierunku wiązki światła zmienia różnicę dróg, którymi przebiega światło w każdym z ramion interferometru. Powyżej pewnej wartości l_c tej różnicy prążki interferencyjne znikają. Różnicę odległości l_c nazywa się długością koherencji. Wprowadza się również czas

koherencji zdefiniowany przez $t_c = \frac{l_c}{c}$, gdzie c jest prędkością światła. Czas

koherencji t_c związany jest prostą zależnością z inną wielkością charakteryzującą wiązkę świetlną. Światło jednobarwne, o którym mówimy, nie jest światłem o ściśle określonej częstotliwości ν . Zawsze istnieje pewien przedział częstotliwości $\Delta\nu$, zwany szerokością spektralną, w którym leżą częstotliwości charakteryzujące daną

wiązkę światła jednobarwnego. Okazuje się, że $t_c = \frac{1}{\Delta\nu}$. O znaczeniu tego związku powiemy później.

Opisaliśmy w skrócie dwa podstawowe doświadczenia ilustrujące istotę pojęcia spójności przestrzennej i czasowej. Aby lepiej przedstawić znaczenie wprowadzonych pojęć, podamy pewne dane liczbowe wynikające z dokładnej teorii. Dla źródła światła czerwonego o średniej długości fali 600 nm, mającego kształt koła o średnicy 1 mm, obszar koherencji w odległości 20 m określony jest średnicą o wartości 3,8 mm. Oznacza to, że gdy odległość między szczelinami w doświadczeniu Younga jest mniejsza niż 3,8 mm, otrzymuje się ostre obrazy interferencyjne. Przy większych odległościach od źródła światła obszar koherencji zwiększa się. Dla światła ze źródeł termicznych długość koherencji w doświadczeniu Michelsona może osiągnąć wartości rzędu kilku metrów. Gdy na przykład

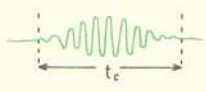
$l_c = 1$ m, otrzymujemy dla czasu koherencji $t_c = \frac{l_c}{c} = 0,3 \cdot 10^{-8}$ s. Wartość

$l_c = 1$ m oznacza, że przesunięcie zwierciadeł w interferometrze Michelsona nie może być większe niż 1 m (jeśli chcemy otrzymać obraz interferencyjny).

Aby wytłumaczyć, skąd biorą się omawiane wyżej warunki powstawania obrazu interferencyjnego, posłużymy się pewnym uproszczonym opisem atomowej struktury źródła. Atomy i molekuly świecącego źródła będziemy traktować jako niezależne nadajniki fal świetlnych. To przybliżenie jest szczególnie dobre, gdy źródłem jest świecący gaz. Każdy z atomów lub każda z molekuł, gdy zostaną wzbudzone do świecenia (na przykład przez ogrzanie ciała do odpowiednio wysokiej temperatury, wyładowania elektryczne itp.), wysyłają spontanicznie krótko trwające impulsy. Czas trwania impulsu dla typowych wzbudzeń wynosi około 10^{-8} s. Taką falę elektromagnetyczną o skończonym czasie trwania będziemy nazywać ciągiem falowym. Problem „jaki jest kształt przestrzenny ciągu falowego?” jest złożony i nie możemy go tutaj dokładnie omówić. Wyjaśnimy jednak, że nie jest to fala kulista, każdy bowiem świecący przez krótki czas atom lub molekula są podobne do anteny radiowej lub telewizyjnej, wysyłają promieniowanie w pewnych kierunkach szczególnie silnie. Częstotść ν ciągu falowego można określić tylko z pewną dokładnością $\Delta\nu$. Dokładniejsza analiza pokazuje, że $\Delta\nu$ jest odwrotnością czasu trwania ciągu falowego.

Możemy teraz powrócić do fizycznego znaczenia czasu koherencji t_c . Jak widać, jest on równy czasowi trwania pojedynczego ciągu falowego. Jeśli źródłem światła jest świecący gaz, to charakteryzuje się on tym, że wysyła promieniowanie o wielu różnych częstotliwościach — powiedzmy ν_1 z szerokością spektralną $\Delta\nu_1$, ν_2 z szerokością spektralną $\Delta\nu_2$ itd. Posługując się odpowiednim filtrem lub wykorzystując zjawisko rozszczepienia światła przez pryzmat możemy otrzymać światło jednobarwne o częstotliwości ν_0 . Częstotść tego światła leży w zakresie optycznym, a więc wynosi około $\nu_0 \approx 10^{15}$ s⁻¹. Szerokość spektralna każdego z ciągów falowych wysyłanych przez świecące atomy gazu ma wartość $\Delta\nu_0 = 10^8$ s⁻¹, gdyż — jak już wspomnieliśmy — czas trwania ciągu wynosi około 10^{-8} s. Wobec tego, że częstotść drgań pola fali świetlnej jest 10^{15} Hz, liczba drgań w jednym ciągu falowym wynosi 10^7 . Rys. 4 ilustruje drgania w ciągu falowym tylko w przybliżeniu, gdyż nie możemy na nim zaznaczyć tak dużej liczby drgań.

Dla uproszczenia naszego modelu źródła termicznego pominęliśmy szereg efektów, np. zderzenia atomów w gazie. Zaniechaliśmy też fakt, że częstotści fal elektromagnetycznych wysyłanych przez różne atomy różnią się od siebie na skutek zjawiska Dopplera. Mimo tych uproszczeń Czytelnik może odpowiedzieć na pytanie dotyczące pochodzenia warunków powstawania obrazu interferencyjnego. W przypadku doświadczenia Younga każdy z atomów źródła S wysyła ciąg falowy, który dochodzi do szczelin S_1 i S_2 , przy czym różnica faz drgań pola świetlnego w S_1 i S_2 zależy od różnicy odległości atomu od szczelin. O tym, gdzie powstają miejsca jasne i ciemne, decyduje całkowita różnica dróg

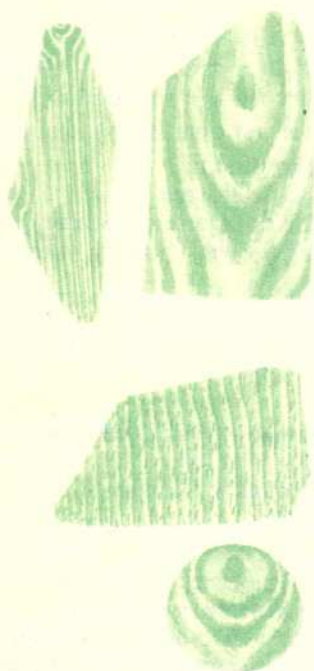


optycznych: atom-szczeliny S_1, S_2 —dane miejsce na ekranie. Gdy rozmiary źródeł S są tak duże, że nie można uważać, iż wszystkie atomy świecą w jednym punkcie, rozkład prążków interferencyjnych jest różny dla różnych atomów, i w rezultacie na ekranie otrzymuje się równomierne oświetlenie, a nie ostry obraz interferencyjny. Podobnie jest w interferometrze Michelsona. Tu każdy ciąg falowy ulega rozdzieleniu na dwa i, chociaż każda z wiązek zawiera bardzo dużą liczbę ciągów falowych, fazy powstałych dwu wiązek są takie same, jeśli różnica dróg optycznych jest mniejsza od długości ciągu falowego.

Na zakończenie warto podkreślić, że zrozumienie warunków powstawania prążków interferencyjnych zarówno w doświadczeniu Younga, jak i w interferometrze Michelsona opiera się na tym samym modelu źródła termicznego. Pokazuje to, że pojęcia spójności przestrzennej i czasowej, które wprowadziliśmy przy omawianiu doświadczeń interferencyjnych, są tylko wygodnym sposobem klasyfikacji faktów eksperymentalnych. Zjawiska interferencji światła zarówno w doświadczeniu Younga, interferometrze Michelsona, jak i innych można obserwować i badać znacznie łatwiej, jeśli źródłem światła w takich doświadczeniach jest laser. Warunki obserwacji, o których tu mówiliśmy, są spełnione, gdyż i obszar koherencji, i czas koherencji światła laserowego są znacznie większe niż dla źródeł termicznych. Dla zrozumienia tego faktu niezbędna jest jednak dokładniejsza znajomość zasady działania lasera i sposobu, w jaki świecą atomy. Prosty model źródła termicznego, którym się tu posługiwaliśmy, jest w przypadku lasera zupełnie nieprzydatny. Nie wyjaśnia on także innych cech światła laserowego związanych z jego wyjątkową spójnością. Tymi zagadnieniami zajmiemy się niebawem.

Analityczne własności zbiorów wypukłych

Mgr Ryszard KOPIECKI



Przypomnijmy: zbiór A nazywamy wypukłym, jeśli wraz z każdymi dwoma jego punktami a, b należą do A również wszystkie punkty odcinka o końcach a i b . Łatwo można podać przykłady takich zbiorów: wypukłymi są zbiory jednopunktowe, odcinki (z końcami lub bez), półproste, koła, trójkąty, kule, ostrosłupy o podstawach wypukłych i wiele innych zbiorów. Równie łatwo można podać przykłady zbiorów, które nie są wypukłe: zbiory dwupunktowe, okrąg, wykresy funkcji trygonometrycznych, koło z usuniętym punktem wewnętrznym i inne. Interesować nas będą pewne własności *analityczne* zbiorów wypukłych, tzn. te, które można opisać przy pomocy własności funkcji na nich określonych. Dzięki badaniu takich własności uzyskano wiele ważnych wyników w samej matematyce oraz wiele interesujących zastosowań zbiorów wypukłych w naukach przyrodniczych zob. np. „Sztuka wygrywania” w tym numerze. Jak wiadomo, punkty n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej z danym układem współrzędnych można utożsamiać z n -tkami liczb rzeczywistych. Przy takich utożsamieniach pewnym konstrukcjom geometrycznym odpowiadają pewne operacje algebraiczne. I tak dodawaniu punktów (wektorów) w takich przestrzeniach odpowiada sumowanie ciągów liczb „po współrzędnych”. Dokładniej, jeśli punktom a, b przyporządkowane są ciągi ich współrzędnych (a_1, \dots, a_n) i (b_1, \dots, b_n) , to suma $a + b$ ma współrzędne $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$, iloczyn punktu a przez liczbę rzeczywistą r jest punktem ra o współrzędnych $(ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$.

Definicję zbioru wypukłego możemy teraz zapisać tak:

Zbiór A zawarty w przestrzeni euklidesowej nazwiemy wypukłym, jeśli wraz z dowolnymi jego elementami a, b należy do A każdy element postaci $t \cdot a + (1-t) \cdot b$ dla $0 \leq t \leq 1$ (skorzystaliśmy po prostu z parametrycznego opisu odcinka o końcach a, b ; zob. zadanie 1). Funkcję f , określoną na przestrzeni euklidesowej i przybierającą wartości również w przestrzeni euklidesowej, nazwiemy funkcją lub przekształceniem liniowym, jeśli

(1) f jest addytywna, tzn. zawsze $f(a+b) = f(a) + f(b)$ (dwa znaki plus oznaczają tu inne działania; pierwszy — działanie z dziedziny funkcji, drugi — ze zbioru wartości),

(2) f jest jednorodna, tzn. zawsze $f(r \cdot a) = r \cdot f(a)$ (podobnie jak poprzednio, znak iloczynu (kropka) oznacza dwa działania mnożenia przez liczbę rzeczywistą: mnożenie określone w dziedzinie funkcji f oraz w jej zbiorze wartości).