Stąd

$$\bar{\nu} = \frac{h}{32ml^2c} \frac{2r+11}{(r+5)^2} .$$

Jeśli obliczylibyśmy $\bar{\nu}$ dla molekuły o $r = 0$, przyjmując $l = 1,5$ Å, to otrzymalibyśmy $\bar{\nu} = 14\,800\ \mathrm{cm}^{-1}$, podczas gdy doświadczenie daje $\bar{\nu} = 17\,000\ \mathrm{cm}^{-1}$. Obliczmy, jakie musielibyśmy przyjąć l, aby otrzymać wynik zgodny z doświadczeniem. Obliczone w ten sposób l wynosi 1,4 Å. Użyjmy tak znalezionego l do obliczenia $\bar{\nu}$ dla molekuł o $r = 1,2,3, \ldots$. Wyniki uzyskane z dokładnością do trzech cyfr znaczących zestawiono następująco:

r	$\bar{\nu}$ obliczone	$\bar{\nu}$ doświadczalne
0	17 000	17 000
1	14 000	14 100
2	11 800	12 200
3	10 300	10 700

Widzimy zadziwiającą, jak na dokonane uproszczenia, zgodność wyników teoretycznych z doświadczeniem. W wielu innych przypadkach wymagana zmiana l byłaby znacznie większa, a zgodność z doświadczeniem gorsza.
Za barwę związku chemicznego odpowiedzialne są pochłaniane kwanty promieniowania. W ten sposób na wyjątkowo prostej drodze udało nam się „obliczyć" barwę bardzo skomplikowanych związków chemicznych.

Gry wielochodowe

Dr Wojciech GUZICKI

W artykule tym zajmiemy się grami dwuosobowymi, rozgrywanymi według następujących zasad:
Dwaj gracze (gracz I i gracz II) wykonują kolejno, poczynając od gracza I, ruchy polegające na wybieraniu dowolnego elementu z ustalonego zbioru A. Ten sam element zbioru A może być wybierany wielokrotnie zarówno przez gracza I, jak i gracza II.
W ten sposób w każdym momencie zostaje wybrany ciąg skończony $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementów zbioru A. Przepisy gry są zbiorem reguł mówiących, czy w danej sytuacji graczowi, na którego przypada kolej, wolno jeszcze wykonać ruch, a jeśli wolno, to jakie ruchy są dozwolone. Jeśli już mu nie wolno wykonać żadnego ruchu, to mówimy, że gra dobiegła końca, a jej efekt (tzn. ciąg skończony $a_1, \ldots, a_n$) nazywamy partią. Może się jednak zdarzyć, że obaj gracze grają tak, że w żadnym momencie przepisy gry nie nakażą im zakończyć jej. Wtedy w wyniku spotkania otrzymamy ciąg nieskończony $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, który również będziemy nazywać partią. Każdy ciąg skończony, będący początkowym fragmentem partii, będziemy odtąd nazywać pozycją.
Po zakończeniu gry powstaje oczywiście problem, kto daną partię wygrał. Aby móc zawsze odpowiedzieć na to pytanie, dzielimy zbiór wszystkich możliwych partii na trzy części: W_0, W_1, W_2. Partia jest remisowa, jeśli należy do zbioru W_0; wygrana przez gracza I, jeśli należy do W_1; i wygrana przez gracza II, jeśli należy do W_2.
W tej części artykułu zajmiemy się grami skończonymi. Wyjaśnijmy, co znaczy tu termin „skończona". Otóż gra jest skończona, jeśli przepisy pozwalają wykonać w każdej pozycji tylko skończenie wiele różnych ruchów oraz nie dopuszczają istnienia nieskończenie długich partii. Przykładem gry skończonej są szachy, zbiorem A bowiem jest zbiór instrukcji dla figur (np. Wb7–b8), natomiast przepis zapewniający skończoność każdej partii stwierdza, że gra kończy się po trzykrotnym powtórzeniu się tej samej sytuacji na szachownicy.
Aby wyjaśnić, co to znaczy „zapewnić sobie zwycięstwo", zdefiniujemy pojęcie strategii. Strategią gracza I jest dowolna funkcja, która każdej możliwej pozycji $a_1, \ldots, a_n$ o parzystej (również zerowej) liczbie wyrazów przyporządkowuje jakikolwiek ruch $a_{n+1} \in A$, dopuszczony w tej pozycji przez przepisy gry.
Podobnie strategią gracza II nazwiemy analogiczną funkcję określoną dla pozycji o długości nieparzystej. Strategia jest więc po prostu funkcją, która „podpowiada" graczowi, jak w danej sytuacji ma zagrać. Zauważmy następnie, że jeśli gracz I wybierze sobie strategię σ, a gracz II strategię τ, to te dwie strategie jednoznacznie wyznaczają partię, którą rozgrywają między sobą gracze I i II. Jej początkowymi ruchami będą: $a_1 = \sigma(\emptyset)$, $a_2 = \tau(a_1)$, $a_3 = \sigma(a_1, a_2)$, $a_4 = \tau(a_1, a_2, a_3)$ itd.

Rozwiązanie zadania F 21, pyt. b)

Przypuszczenie wyrażone w treści zadania jest błędne, a wynika to z zasady zachowania energii (ale nie tylko mechanicznej, gdyż ta zasady zachowania nie spełnia, lecz całkowitej, tzn. z uwzględnieniem przyrostu energii wewnętrznej E). Jeśli na początku ruchu rura spoczywała, to zasadę zachowania energii wyraża równanie

$$E_{\text{pot}}^{0} = E_{\text{pot}} + E_{\text{post}} + E_{\text{obr}} + E,$$

gdzie: E_{pot}^{0} — energia potencjalna rury na początku ruchu, E_{pot} — energia potencjalna rury podczas ruchu, E_{post} — energia kinetyczna ruchu postępowego rury, E_{obr} — energia kinetyczna ruchu obrotowego rury. Różnica energii potencjalnych jest równa pracy siły F na drodze x, gdzie x — droga przebyta przez środek masy rury od chwili początkowej do danego momentu, czyli $E_{\text{pot}}^{0} - E_{\text{pot}} = F \cdot x$; energia kinetyczna ruchu postępowego jest równa pracy wypadkowej siły F i siły tarcia T na drodze x: $E_{\text{post}} = (F-T) \cdot x$. Zatem

$$E = Fx - (F-T)x - E_{\text{obr}} = Tx - E_{\text{obr}}$$

czyli część energii mechanicznej, która wskutek działania siły tarcia uległa zamianie na energię wewnętrzną, jest równa różnicy pracy siły tarcia i energii kinetycznej ruchu obrotowego, a nie jedynie pracy siły tarcia. Jaki sens fizyczny ma uzyskany wynik? Czy E może być równe zeru? Jeśli tak, to w jakim przypadku? Jeśli nie — dlaczego? (Wskazówka: wyrazić E_{obr} przez pracę i skorzystać z relacji między v i ω w przypadkach ruchu bez poślizgu i ruchu z poślizgiem).

Zajmijmy się teraz wyłącznie grami nie dopuszczającymi remisu (tzn. takimi, dla których $W_0 = \emptyset$); później pokażemy, że przypadek ogólny łatwo sprowadza się do powyższego.

Będziemy mówić, że strategia σ gracza I jest strategią zwycięską, jeśli dla dowolnej strategii τ gracza II partia wyznaczona przez obie te strategie (oznaczmy ją przez $\sigma * \tau$) należy do W_1. Podobnie τ jest strategią zwycięską dla gracza II, jeśli dla dowolnej strategii σ partia $\sigma * \tau$ należy do W_2. Innymi słowy strategia zwycięska zawsze podpowiada ruch, na który przeciwnik nie ma „dobrej" odpowiedzi, i w konsekwencji gracz grający przy pomocy tej strategii musi wygrać. To właśnie nazywamy zapewnieniem sobie zwycięstwa. Grę nazywamy zdeterminowaną jeśli któryś z graczy ma strategię zwycięską. Pokażemy, że gry skończone są zdeterminowane. Nie są takimi jednak wszystkie gry nieskończone. Pytanie, jakie gry nieskończone są zdeterminowane, stało się ostatnio bardzo modne w w podstawach teorii mnogości i doprowadziło do wielu interesujących wyników.

Zajmijmy się teraz grami skończonymi. Przede wszystkim pokażemy, że w danej grze skończonej istnieje tylko skończenie wiele możliwych do rozegrania partii. Fakt ten bynajmniej nie jest oczywisty — wydawać by się mogło, że choć nie istnieje partia nieskończona, to mogą istnieć dowolnie długie partie skończone. Okazuje się, że tak nie jest.

Oznaczmy w naszej grze przez P zbiór pozycji, w których grę można nadal kontynuować. Pokażemy najpierw, że zbiór P jest skończony. Dowód przeprowadzimy przez sprowadzenie do niedorzeczności. Gdyby zbiór P był nieskończony, to znalazłby się taki ruch $a_1 \in A$, że zbiór tych należących do P pozycji, które zaczynają się ruchem a_1, byłby też nieskończony. Wynika to z tego, że istnieje tylko skończona liczba możliwości wykonania pierwszego ruchu (stosujemy tu również następującą zasadę: jeśli zbiór nieskończony podzielimy na skończenie wiele części, to jedna z nich jest nieskończona; zasadę tę już raz zastosowaliśmy powyżej, aby pokazać, że każda partia szachowa musi być skończona). Następnie znajdujemy $a_2 \in A$ taki, że istnieje w P nieskończenie wiele pozycji, które zaczynają się ruchami a_1 i a_2. W ten sposób postępują dalej, tworząc ciąg nieskończony $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, którego wszystkie początkowe pozycje należą do P, a więc nie są pozycjami końcowymi w naszej grze. Skonstruowaliśmy więc partię nieskończenie długą, co jednak wykluczają przepisy gry. Zbiór P jest zatem skończony (oczywiście, ścisły dowód powinien być przeprowadzony przy zastosowaniu zasady indukcji matematycznej — Czytelnik zechce to zrobić sam). Ponieważ każda pozycja w naszej grze powstaje z pewnej pozycji należącej do P poprzez wykonanie tylko jednego ruchu, więc istnieje tylko skończenie wiele wszystkich pozycji (przypominamy, że daną pozycję można przedłużyć tylko na skończoną liczbę sposobów).

Możemy już teraz pokazać, że każda gra skończona jest zdeterminowana. Niech N będzie liczbą naturalną parzystą, większą od długości każdej partii naszej gry. Oznaczmy przez $A(a_1, \ldots, a_n)$ zbiór ruchów możliwych do wykonania w pozycji $a_1 \ldots, a_n$.

Zapiszmy teraz, co to znaczy, że gracz I ma strategię zwycięską:

$$\bigvee_{a_1 \in A(\emptyset)} \ \bigwedge_{a_2 \in A(a_1)} \ \bigvee_{a_3 \in A(a_1, a_2)} \ \ldots \ \bigwedge_{a_N \in A(a_1, \ldots, a_{N-1})} [a_1 \in W_1 \vee (a_1, a_2) \in W_1 \vee \ldots \vee \vee (a_1, \ldots, a_N) \in W_1].$$

Jeśli nie jest prawdą, że gracz I ma strategię zwycięską, to stosując prawa de Morgana otrzymamy

$$\bigwedge_{a_1 \in A(\emptyset)} \ \bigvee_{a_2 \in A(a_1)} \ \bigwedge_{a_3 \in A(a_1, a_2)} \ \ldots \ \bigvee_{a_N \in A(a_1, \ldots, a_{N-1})} [a_1 \notin W_1 \wedge (a_1, a_2) \notin W_1 \wedge \ldots \wedge \wedge (a_1, \ldots, a_N) \notin W_1].$$

Jednakże spośród ciągów a_1, (a_1, a_2), ... oraz $(a_1, \ldots, a_n)$ jeden musi być zakończoną partią, bo N jest większe od długości wszystkich partii. Zatem musi on należeć do W_2 (bo nie należy do W_1).

Stąd mamy

$$\bigwedge_{a_1 \in A(\emptyset)} \ \bigvee_{a_2 \in A(a_1)} \ \bigwedge_{a_3 \in A(a_1, a_2)} \ \ldots \ \bigvee_{a_N \in A(a_1, \ldots, a_{N-1})} [a_1 \in W_2 \vee (a_1, a_2) \in W_2 \vee \ldots \vee \vee (a_1, \ldots, a_N) \in W_2].$$

Ale to oznacza, że gracz II ma strategię zwycięską. Pokazaliśmy więc, że istotnie jeden z graczy ma strategię zwycięską, czyli że nasza gra jest zdeterminowana.

Powróćmy teraz do gier dopuszczających remis. Niech więc $W_0 \neq \emptyset$.

Rozważmy dwie pomocnicze gry: jedną, w której położymy $W_1' = W_0 \cup W_1$ i $W_2' = W_2$, oraz drugą, w której $W_1'' = W_1$ i $W_2'' = W_0 \cup W_2$. Obie te gry są zdeterminowane. Możliwe są zatem następujące przypadki:

1. Gracz I ma strategię zwycięską w obu pomocniczych grach. Wtedy istnieje strategia pozwalająca mu wygrać grę, którą mamy rozważać (mianowicie strategia zwycięska w drugiej grze pomocniczej).

2. Gracz II ma strategię zwycięską w obu pomocniczych grach, ma zatem strategię zwycięską w rozważanej grze.
3 Gracz I ma strategię zwycięską w pierwszej grze pomocniczej, a gracz II w drugiej. Wtedy te dwie strategie pozwalają tym graczom zremisować rozważaną grę.
Przypadek ostatni, gdy gracz I ma strategię zwycięską w drugiej grze pomocniczej, a gracz II w pierwszej, jest, jak łatwo się przekonać, niemożliwy. Każda zatem gra skończona jest albo zdeterminowana z korzyścią dla któregoś z graczy, albo jest grą remisową. Wątpliwe jednak, czy kiedykolwiek będziemy wiedzieli, do której z tych grup należą np. szachy, a w każdym razie ani Fischer ani Karpow nas o tym nie przekonają.
Z punktu widzenia matematyki, gry skończone nie są ciekawe. Następnym razem zajmiemy się problemem gier nieskończonych.

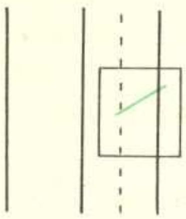
Metody Monte Carlo (I)

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

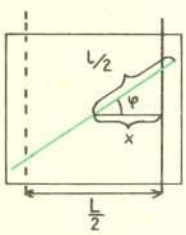
O ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ ZA POMOCĄ EKSPERYMENTU STATYSTYCZNEGO

Zacznijmy od bardzo łatwego zadania z rachunku prawdopodobieństwa.
Rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Obliczyć prawdopodobieństwo p tego, że na każdej z trzech monet otrzymamy ten sam wynik. Zwykle takie zadania rozwiązuje się w znany sposób. Umawiamy się mianowicie, że monety zostały ponumerowane, i określamy zbiór zdarzeń elementarnych jako zbiór wszystkich uporządkowanych trójek (m_1, m_2, m_3), gdzie m_i oznacza orła lub reszkę na i-tej monecie. Z założenia o symetryczności monet każde z tych zdarzeń jest jednakowo prawdopodobne. Wszystkich zdarzeń jest osiem, zdarzeń zaś sprzyjających — dwa (zdarzenia: orzeł–orzeł–orzeł i reszka–reszka–reszka), otrzymujemy więc $p = \frac{1}{4}$.

A oto inny sposób rozwiązania naszego zadania. Podrzucamy do góry trzy symetryczne monety, a gdy spadną, sprawdzamy, czy na wszystkich trzech mamy orła lub na wszystkich trzech reszkę. Jeżeli tak, odnotowujemy wynik naszego doświadczenia jako sukces i powtarzamy rzut. Przypuśćmy, że wykonaliśmy n rzutów i że k razy zaobserwowaliśmy sukces. Za przybliżone rozwiązanie zadania przyjmujemy stosunek $\frac{k}{n}$.

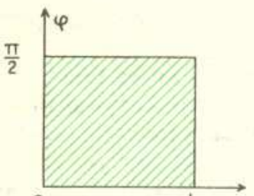

Rys 1

Otrzymane w ten sposób oszacowanie rozwiązania będziemy oznaczali $\hat{p}$ lub, gdy będzie nam zależało na podkreśleniu, że oszacowanie otrzymano na postawie n doświadczeń — symbolem $\hat{p}_n$.
Mamy więc w naszym przypadku $\hat{p} = \frac{k}{n}$. Opisany sposób rozwiązywania zadania wygląda na pierwszy rzut oka nie bardzo poważnie i trudno jest wyobrazić sobie poważny egzamin maturalny, podczas którego uczniowie podrzucają do góry monety, albo poważnych i wielce uczonych fizyków, którzy w ten sposób obliczają rozmiary projektowanych reaktorów jądrowych. Nieco zaskakujący, ale prawdziwy jest fakt, że tego rodzaju metody rachowania — zwane powszechnie metodami Monte Carlo — wymyślono właśnie dla fizyków, którzy w końcu drugiej wojny światowej rozwiązywali nowe i trudne zadania z zakresu fizyki atomowej; a z powstaniem tych metod związane są nazwiska tak wybitnych uczonych, jak John von Neumann i Stanisław Ulam. Wrócimy do tych spraw później, a na razie spójrzmy na jeszcze jedno zadanie.



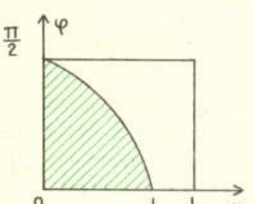
Rys. 2

W XVIII wieku przyrodnik francuski G. L. Buffon rozważał następujące zadanie. Poliniujmy powierzchnię stołu równoległymi prostymi tak, aby odległości między każdymi dwiema sąsiednimi prostymi były równe L. Na ten stół będziemy rzucali losowo („na chybił-trafił") igłę o długości $l < L$. Należy obliczyć prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że igła przetnie którąś z prostych narysowanych na stole.
Podobnie jak poprzednio rozwiążemy najpierw to zadanie dokładnie, korzystając przy tym z pojęć prawdopodobieństwa geometrycznego (por. «Delta», 1975, 6).
Wprowadźmy następujące oznaczenia: x — odległość środka igły od najbliższej prostej, φ — kąt ostry, jaki tworzy igła z prostą prostopadłą do linii narysowanych na stole. Mamy więc zawsze $0 \leqslant x \leqslant \frac{L}{2}$ oraz $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ (rys. 1 i 2). Rzucanie igły „losowo" na stół będziemy rozumieli w ten sposób, że punkt (x, φ) ma rozkład jednostajny na prostokącie zakreskowanym na rys. 3.



Rys. 3

Mówiąc niezbyt dokładnie: fakt, że igła może z jednakowym prawdopodobieństwem upaść na każdy punkt stołu i mieć przy tym z jednakowym prawdopodobieństwem każdy kierunek (to jest właśnie treść intuicyjna powiedzenia, że igła jest rzucana „losowo"), interpretujemy jako fakt, że punkt (x, φ) pojawia się losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem, w każdym miejscu określonego wyżej prostokąta.
Dalsze rozwiązanie jest już łatwe. Przecięcie igły z linią narysowaną na stole następuje wtedy i tylko wtedy, gdy $x < \frac{l}{2} \cos\varphi$ (rys. 2). Zbiór tych par (x, φ), dla których $x < \frac{l}{2} \cos\varphi$, zakreskowano na rys. 4. Zgodnie z zasadami rachowania prawdopodobieństw geometrycznych, prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia jest równe stosunkowi pól figury zakreskowanej na rys. 4 do pola całego prostokąta i wynosi



Rys. 4

$$p = \frac{2l}{\pi L}. \tag{1}$$