optycznych: atom–szczeliny S_1, S_2–dane miejsce na ekranie. Gdy rozmiary źródła S są tak duże, że nie można uważać, iż wszystkie atomy świecą w jednym punkcie, rozkład prążków interferencyjnych jest różny dla różnych atomów, i w rezultacie na ekranie otrzymuje się równomierne oświetlenie, a nie ostry obraz interferencyjny. Podobnie jest w interferometrze Michelsona. Tu każdy ciąg falowy ulega rozdzieleniu na dwa i, chociaż każda z wiązek zawiera bardzo dużą liczbę ciągów falowych, fazy powstałych dwu wiązek są takie same, jeśli różnica dróg optycznych jest mniejsza od długości ciągu falowego.
Na zakończenie warto podkreślić, że zrozumienie warunków powstawania prążków interferencyjnych zarówno w doświadczeniu Younga, jak i w interferometrze Michelsona opiera się na tym samym modelu źródła termicznego. Pokazuje to, że pojęcia spójności przestrzennej i czasowej, które wprowadziliśmy przy omawianiu doświadczeń interferencyjnych, są tylko wygodnym sposobem klasyfikacji faktów eksperymentalnych. Zjawiska interferencji światła zarówno w doświadczeniu Younga, interferometrze Michelsona, jak i innych można obserwować i badać znacznie łatwiej, jeśli źródłem światła w takich doświadczeniach jest laser. Warunki obserwacji, o których tu mówiliśmy, są spełnione, gdyż i obszar koherencji, i czas koherencji światła laserowego są znacznie większe niż dla źródeł termicznych. Dla zrozumienia tego faktu niezbędna jest jednak dokładniejsza znajomość zasady działania lasera i sposobu, w jaki świecą atomy. Prosty model źródła termicznego, którym się tu posługiwaliśmy, jest w przypadku lasera zupełnie nieprzydatny. Nie wyjaśnia on także innych cech światła laserowego związanych z jego wyjątkową spójnością. Tymi zagadnieniami zajmiemy się niebawem.

Analityczne własności zbiorów wypukłych

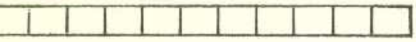
Mgr Ryszard KOPIECKI

Przypomnijmy: zbiór A nazywamy wypukłym, jeśli wraz z każdymi dwoma jego punktami a, b należą do A również wszystkie punkty odcinka o końcach a i b. Łatwo można podać przykłady takich zbiorów: wypukłymi są zbiory jednopunktowe, odcinki (z końcami lub bez), półproste, koła, trójkąty, kule, ostrosłupy o podstawach wypukłych i wiele innych zbiorów. Równie łatwo można podać przykłady zbiorów, które nie są wypukłe: zbiory dwupunktowe, okrąg, wykresy funkcji trygonometrycznych, koło z usuniętym punktem wewnętrznym i inne. Interesować nas będą pewne własności *analityczne* zbiorów wypukłych, tzn. te, które można opisać przy pomocy własności funkcji na nich określonych. Dzięki badaniu takich własności uzyskano wiele ważnych wyników w samej matematyce oraz wiele interesujących zastosowań zbiorów wypukłych w naukach przyrodniczych zob. np. „Sztuka wygrywania" w tym numerze.
Jak wiadomo, punkty n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej z danym układem współrzędnych można utożsamiać z n-tkami liczb rzeczywistych. Przy takich utożsamieniach pewnym konstrukcjom geometrycznym odpowiadają pewne operacje algebraiczne. I tak dodawaniu punktów (wektorów) w takich przestrzeniach odpowiada sumowanie ciągów liczb „po współrzędnych". Dokładniej, jeśli punktom a,b przyporządkowane są ciągi ich współrzędnych $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$, to suma $a+b$ ma współrzędne $(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$, iloczyn punktu a przez liczbę rzeczywistą r jest punktem ra o współrzędnych $(ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)$.
Definicję zbioru wypukłego możemy teraz zapisać tak:
Zbiór A zawarty *w przestrzeni euklidesowej nazwiemy wypukłym, jeśli wraz z dowolnymi jego elementami a,b* należy do *A każdy element postaci* $t \cdot a + (1-t) \cdot b$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ (skorzystaliśmy po prostu z parametrycznego opisu odcinka o końcach a,b; zob. zadanie 1). Funkcję f, określoną na przestrzeni euklidesowej i przybierającą wartości również w przestrzeni euklidesowej, nazwiemy funkcją lub przekształceniem liniowym, jeśli
(1) f jest addytywna, tzn. zawsze $f(a+b) = f(a)+f(b)$ (dwa znaki plus oznaczają tu inne działania; pierwszy — działanie z dziedziny funkcji, drugi — ze zbioru wartości),
(2) f jest jednorodna, tzn. zawsze $f(r \cdot a) = r \cdot f(a)$ (podobnie jak poprzednio, znak iloczynu (kropka) oznacza dwa działania mnożenia przez liczbę rzeczywistą: mnożenie określone w dziedzinie funkcji f oraz w jej zbiorze wartości).

Rozwiązanie zadania M 63. Dane równanie można napisać w postaci

$(x_1+1)+(x_2+1)+\dots+(x_k+1) = n+k$ (*)

Wyobraźmy sobie pasek złożony z $n+k$ kratek.



Każdemu rozwiązaniu równania (*) odpowiada pewien podział tego paska na k części (każda część złożona z pewnej liczby kratek). Podział taki następuje po wykonaniu $k-1$ cięć wzdłuż granic kratek, przy czym cięcia mogą być dokonywane na każdej z $n+k-1$ linii rozdzielających kratki. Jak wiadomo, można to zrobić

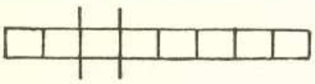
$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$$

sposobami.

Tyle jest więc rozwiązań danego równania.

Zilustrujemy przypadek $k = 3$, $n = 5$.

Rozwiązaniu (1,0,4) odpowiada podział



Możemy teraz sformułować i wykazać kilka interesujących własności zbiorów wypukłych.

Własność 1. Obraz zbioru wypukłego przy przekształceniu liniowym jest zbiorem wypukłym; to samo można powiedzieć o przeciwobrazach.

DOWÓD. Przypuśćmy, że A jest zbiorem wypukłym, f — przekształceniem liniowym. Powinniśmy wykazać, że obraz $f(A) = \{q$: istnieje $p \in A$, że $f(p) = q\}$ jest zbiorem wypukłym. Niech q_1 i q_2 należą do zbioru $f(A)$ i niech $f(p_1) = q_1$, $f(p_2) = q_2$ dla pewnych p_1, p_2 należących do A. Z założenia o wypukłości zbioru A każdy punkt postaci $tp_1+(1-t)p_2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, należy do A. Obrazami tych punktów są punkty $f(tp_1+(1-t)p_2)$, lecz funkcja f jest liniowa, więc $f(tp_1+(1-t)p_2) = f(tp_1)+f((1-t)p_2) = tf(p_1)+(1-t)f(p_2) = tq_1+(1-t)q_2$, Wykazaliśmy, że każdy punkt postaci $tq_1+(1-t)q_2$ dla $0 \leqslant t \leqslant 1$ należy do zbioru $f(A)$, więc na mocy definicji zbiór $f(A)$ jest wypukły. Czytelnikowi proponuję jako zadanie: wykazanie wypukłości przeciwobrazu, przy założeniu, że obraz jest wypukły.

Przed sformułowaniem dalszych własności przypomnijmy, że przez odległość punktu p od zbioru Z rozumiemy kres dolny zbioru liczb $\{\varrho(p, z): z \in Z\}$, gdzie $\varrho(p, z)$ oznacza ,,zwykłą" odległość punktów p i z (zob. również artykuły M. Moszyńskiej, «Delta», 1975, 1, 5, 8). Oznaczmy tę odległość p od Z przez $d(p, Z)$. Zauważmy jeszcze, że zbiór Z jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy należą doń wszystkie te punkty, których odległość od Z jest równa zeru (Czytelnik bez trudu dowiedzie tej równoważności). Możemy teraz podać kolejną własność zbiorów wypukłych.

Własność 2. Niech A będzie zbiorem wypukłym i domkniętym oraz p — dowolnym punktem. Wówczas do zbioru A należy dokładnie jeden taki punkt a, że $d(p, A) = \varrho(p, a)$.

DOWÓD. Możliwe są dwa przypadki: $d(p, A) = 0$ i $d(p, A) > 0$. W pierwszym z nich, na mocy domkniętości zbioru A, punkt p należy do A, wspomnianym zaś punktem a jest sam punkt p. Rozpatrzmy drugi przypadek.

Niech $d(p, A) = r$; wówczas istnieje ciąg $\{p_n\}$ punktów zbioru A taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(p, p_n) = r$. Taki ciąg możemy utworzyć w następujący sposób: przyporządkowujemy liczbie naturalnej n dowolny punkt p_n z bioru A spełniający warunek $\varrho(p, p_n) < r+1/n$. Ciąg $\{p_n\}$ jest ograniczony, gdyż wszystkie jego wyrazy leżą w kuli o środku w punkcie p i promieniu $r+1$, więc istnieje jego podciąg, zbieżny do pewnego punktu a należącego do A (zbiór A jest domknięty). Oczywiście $\varrho(p,a) = r$. Wykazaliśmy istnienie co najmniej jednego punktu a zbioru A o własności $\varrho(p, a) = r$. Wykażemy teraz, że w zbiorze A jest dokładnie jeden taki punkt. Cóż bowiem byłoby, gdyby do A należał jeszcze jeden różny od niego punkt b taki, że $\varrho(p, b) = r$? Zbiór A jest wypukły, więc wraz z punktami a i b należy doń np. punkt $c = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ (tj. środek odcinka o końcach a i b). Ale środek cięciwy o końcach a, b leży *wewnątrz* kuli $K(p, r)$, skąd $\varrho(p, c) < r$. Ponieważ zaś jednocześnie $c \in A$, to wynikałoby stąd, że $d(p, A) \leqslant \varrho(p, c) < r$ wbrew założeniu, iż $d(p, A) = r$.

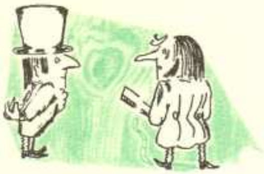
Własność 3 jest szczególnym przypadkiem ważnego *twierdzenia o oddzielaniu*.

Własność 3. Dla każdego zbioru domkniętego i wypukłego A oraz punktu p nie należącego do A istnieje funkcja liniowa f o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, taka że $f(p) = 1$ i $f(b) \leqslant 0$ dla każdego punktu b zbioru A.

DOWÓD. Niech punkt a zbioru A będzie punktem, o którym mówi własność 2, tzn. $d(p, A) = \varrho(p, a)$. Oczywiście $a \neq p$, więc istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkty a i p; można ją przedstawić parametrycznie jako zbiór wszystkich punktów postaci $tp+(1-t)a$, $t \in R$. Każdemu punktowi q przestrzeni przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą t, taką że punkt $tp+(1-t)a$ jest rzutem prostokątnym na tę prostą punktu q. Tak określone przyporządkowanie — oznaczmy je przez f — jest funkcją liniową (gdyż jest złożeniem dwóch funkcji liniowych: rzutowania na prostą i funkcji, przyporządkowującej punktowi $tp+(1-t)a$ liczbę t) oraz spełnia nasze warunki. Istotnie, $f(p) = 1$ i $f(b) \leqslant 0$ dla każdego $b \in A$. Ostatnia nierówność wynika z prostych faktów geometrycznych: gdyby istniał choćby jeden punkt c zbioru A, dla którego $f(c) > 0$, to na odcinku o końcach a i c (całkowicie zawartym w A na mocy wypukłości) leżałby punkt bliższy punktowi p niż punkt a, co jest sprzeczne z określeniem punktu a.

Niech W będzie pewną własnością przysługującą (lub nie) zbiorom. Najmniejszym zbiorem o własności W nazywa się taki zbiór, który
1° — posiada własność W;
2° — jest zawarty w każdym innym zbiorze o tej własności.

Wprowadzimy na zakończenie jeszcze jedno pożyteczne pojęcie: *Uwypukleniem* (powłoką wypukłą) zbioru A nazywamy najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór A. Uwypuklenie to oznacza się symbolem $\operatorname{conv} A$.



Korzystając z własności 3 można udowodnić, że conv$A$ jest częścią wspólną wszystkich półprzestrzeni zawierających zbiór A. (Dowód tego faktu dla płaszczyzny jest treścią zadań 4 i 5).
Jeśli zbiór A jest domknięty, to conv$A$ jest zbiorem tych punktów q, dla których, dla każdej funkcji liniowej f o wartościach liczbowych, liczba $f(q)$ jest nie większa od kresu górnego zbioru $\{w: w = |f(a)|, a \in A\}$. Z tego względu conv$A$ nazywa się często *liniową* powłoką wypukłą zbioru A. Jeśli teraz zamiast rodziny wszystkich funkcji liniowych użyjemy jakiejkolwiek rodziny F funkcji liczbowych, to określony tą własnością zbiór nazywamy powłoką *F-wypukłą* zbioru A. Jako pouczające ćwiczenie proponuję Czytelnikowi znalezienie powłoki *F-wypukłej* sumy dwóch odcinków o wspólnym końcu na płaszczyźnie, dla rodziny F składającej się z jednej funkcji $f(x, y) = \ln(x^2+y^2)$ (zwykła powłoka liniowa takiego zbioru jest oczywiście trójkątem).

Zadania

1. Wykazać, że jeśli na płaszczyźnie z układem współrzędnych punkty $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ oraz $x = (x_1, x_2)$ są współliniowe, to istnieje taka liczba $t \in R$, że

$$x = ta+(1-t)b.$$

Wykazać ponadto, że $t \in <0, 1>$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt x leży między a i b lub jest jednym z tych punktów.
2. Wykazać, że jeśli $A \subset R^k$ jest zbiorem wypukłym, punkty $p_1, p_2, \ldots, p_n$ należą do A oraz liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ są nieujemne i spełniają warunek $\alpha_1+\alpha_2+ \ldots +\alpha_n = 1$, to punkt

$$x = \alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+ \ldots +\alpha_n a_n$$

też należy do A. (Wsk.: dla $n = 2$ twierdzenie jest prawdziwe z definicji zbioru wypukłego; zastosować indukcję).
3. Pokazać, że wielokąt wypukły na płaszczyźnie jest uwypukleniem zbioru wszystkich swoich wierzchołków.
4. Wykazać, że jeśli f jest funkcją liniową o wartościach liczbowych, określoną na płaszczyźnie kartezjańskiej R^2, to dla dowolnego $\alpha \in R$ zbiór

$$\{p \in R^2: f(p) < \alpha\}$$

jest półpłaszczyzną otwartą. Jaka nierówność określa półpłaszczyznę domkniętą? Czy każdą półpłaszczyznę można opisać w ten sposób?
5. Udowodnić, że jeśli $A \subset R^2$, to conv$A$ jest częścią wspólną wszystkich półpłaszczyzn otwartych zawierających A (Wsk.: skorzystać z zadania 1 i własności 3).

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 61. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$, gdzie $n = 3,4,5, \ldots$. Na zewnątrz tego trójkąta zbudowany jest n-kąt foremny o środku O, przy czym jednym z jego boków jest bok AB trójkąta ABC. Wyznaczyć $\sphericalangle OCB$. (Międzyszkolne Koło Matematyczne w Siedlcach).
Rozwiązanie na str. 12.

M 62. Udowodnić, że jeżeli liczba $(n-1)!+1$ jest podzielna przez liczbę n większą od 1, to n jest liczbą pierwszą. ($k!$ jest to iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do k).
Rozwiązanie na str. 2.

M 63. Ile ma rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych $x_1, x_2, \ldots, x_k$ równanie

$$x_1+x_2+ \ldots +x_k = n,$$

gdzie n jest daną liczbą naturalną.
Rozwiązanie na str. 4.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F 21. Rura cienkościenna stacza się po nieruchomej równi pochyłej nachylonej pod kątem α do poziomu. Współczynnik tarcia poślizgowego wynosi μ. a) Jaki jest maksymalny kąt α_{max}, przy którym rura stacza się bez poślizgu?. b) W przypadku ruchu z tarciem energia mechaniczna nie spełnia zasady zachowania, część bowiem energii mechanicznej (oznaczmy ją przez $\mathscr{E}$) ulega zamianie na energię wewnętrzną (potocznie: na ciepło). Wydawać by się mogło, że $\mathscr{E}$ powinno być równe po prostu pracy siły tarcia. Czy przypuszczenie to jest poprawne?
Odpowiedzi na str. str. 6 i 8.
(Zadanie Zbigniewa Peradzyńskiego)